EUGENIO RIGNANO

LE FORME SUPERIORI DEL RAGIONAMENTO

PARTE PRIMA:

Il ragionamento matematico nelle sue fasi del simbolismo diretto e indiretto.

PARTE SECONDA:

Il ragionamento matematico nelle sue fasi di condensazione ed inversione simbolica.

PARTE TERZA:

Matematiche e logica matematica.

Estratto da "SCIENTIA„ Rivista di Scienza
XVII, Anno IX (1915), N.i XXXIX-1, (XL-2)$_1$ e (XL-2)$_2$

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI

LONDON
WILLIAMS AND NORGATE

PARIS
FÉLIX ALCAN

LEIPZIG
WILHELM ENGELMANN

"SCIENTIA,,

(RIVISTA DI SCIENZA)

Organo internazionale di sintesi scientifica - Revue internationale de synthèse scientifique

International Review of Scientific Synthesis - Internationale Zeitschrift für wissenschaftliche Synthese

Paraissant tous les deux mois

(6 numéros par an de 240 à 250 pages chacun)

DIRECTION:

G. Bruni - A. Dionisi - F. Enriques - A. Giardina - E. Rignano

"SCIENTIA,, a été fondée en vue de contrebalancer les fâcheux effets de la spécialisation scientifique à outrance. Elle ne traite que des sujets d'ordre tout à fait général et vise surtout aux rapports qui unissent les différentes sciences entre elles: elle tend par là à la sinthétisation et unification de la science. Par ses *Articles* se rapportant aux branches les plus diverses de la recherche théorique, depuis les mathématiques jusqu'à la sociologie, par ses *Notes Critiques* sur les questions fondamentales le plus à l'ordre du jour, par ses *Comptes Rendus* de tous les ouvrages scientifiques d'intérêt général, par ses *Revues Générales* des derniers progrès dans chaque branche de la science, par ses *Analyses* des articles les plus importants parus sur les autres principaux périodiques de tout le monde, par sa *Chronique* des Congrès et de tous les autres événements de haute importance scientifique, — elle cherche en outre à donner l'idée la plus complète de l'ensemble du mouvement scientifique contemporain.

"SCIENTIA,, fait appel, pour le développement de son programme, à la coopération des autorités scientifiques les plus éminentes de tous les pays. L'accueil favorable qu'elle a rencontré auprès de celles-ci, la collaboration tout-à-fait internationale et de premier ordre qu'elle a réussi à s'assurer, et la diffusion si large qu'elle a gagnée en peu de temps dans tout le monde ont démontré combien son programme correspondait à un vrai besoin du monde savant actuel.

"SCIENTIA,, publie ses articles dans la langue de leurs auteurs. Mais au texte principal est joint ***un supplément avec la traduction française de tous les articles originaux allemands, anglais et italiens.*** Toutes les autres rubriques sont en français ou, elles aussi, traduites en français.

(Pour les renseignements aux auteurs et les abonnements voir la page 3 de la couverture)

EUGENIO RIGNANO

LE FORME SUPERIORI DEL RAGIONAMENTO

PARTE PRIMA:

Il ragionamento matematico nelle sue fasi del simbolismo diretto e indiretto.

PARTE SECONDA:

Il ragionamento matematico nelle sue fasi di condensazione ed inversione simbolica.

PARTE TERZA:

Matematiche e logica matematica.

ESTRATTO DA "SCIENTIA,, Rivista di Scienza
VOL. XVII, ANNO IX (1915), N.i XXXIX-1, (XL-2)₁ E (XL-2)₂

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI

LONDON
WILLIAMS AND NORGATE

PARIS
FÉLIX ALCAN

LEIPZIG
WILHELM ENGELMANN

PARTE PRIMA:

Il ragionamento matematico nelle sue fasi del simbolismo diretto e indiretto.

Nei tre articoli precedenti[1] abbiamo analizzato la natura del ragionamento e ne abbiamo seguito l'evoluzione nel suo duplice aspetto, cioè del passaggio dal ragionamento concreto a quello astratto, e del passaggio dal ragionamento elementare, intuito di getto, a quello sempre più complesso, costituito da una serie più o meno lunga di ragionamenti elementari fra loro concatenati.

Abbiamo visto il ragionamento non consistere, in sostanza, che in operazioni od esperienze, che ci limitiamo ad eseguire coll'immaginazione, perchè di ciascuna già conosciamo il risultato, il quale viene ora per così dire *constatato* solo mentalmente.

Abbiamo visto i « concetti » non essere altro che classi o gruppi di fenomeni o di oggetti, sia pure fra loro differenti quanto si vuole nel loro aspetto esterno, ma fra loró *equivalenti* rispetto a questo o a quel fine, o rispetto al risultato che si ha di mira colle esperienze semplicemente pensate, costituenti il ragionamento. Ridotti questi fenomeni od oggetti a quel solo attributo che li rende equivalenti rispetto a questo risultato perseguito dal ragionamento, il relativo concetto viene

[1] Vedi E. RIGNANO, *Che cos'è il ragionamento?*, « Scientia », 1913, XXVII-1, pag. 45-69; LO STESSO, *L'evoluzione del ragionamento. Parte I: Dal ragionamento concreto a quello astratto*, « Scientia », 1913, XXX-4, pag. 67-89; LO STESSO, *L'evoluzione del ragionamento. Parte II: Dall'intuizione alla deduzione*, « Scientia », 1913, XXXI-5, pag. 213-239.

così ad essere rappresentato da un fenomeno od oggetto unico schematizzato, il quale trasforma il ragionamento stesso da concreto ad astratto; e tale ragionamento astratto — le cui operazioni od esperienze, semplicemente immaginate, relative a questo fenomeno od oggetto così schematizzato, non cessano di presentarsi alla mente come « materialmente tangibili » non meno di prima — vale allora per tutti i singoli ragionamenti concreti, che altrimenti dovrebbero venire eseguiti su ciascuno dei fenomeni od oggetti compresi nel rispettivo concetto.

Abbiamo visto, infine, come la formazione di nuovi concetti o la estensione di concetti antichi, — per la scoperta che implica di nuove categorie di oggetti, equivalenti rispetto ai risultati di determinate operazioni, — aumenti per ciò stesso il numero delle esperienze di cui si conoscono in precedenza i risultati, e aumenti, conseguentemente, in grazia di questa conoscenza preventiva dei rispettivi risultati, il numero delle esperienze medesime suscettibili di venire eseguite solo mentalmente; e come, nel tempo stesso, la schematizzazione dei fenomeni od oggetti, implicita in questa formazione nuova o in questa estensione maggiore dei concetti, rendendo più semplici le operazioni od esperienze da eseguirsi su di essi, faciliti la rappresentazione mentale di lunghe serie di queste ultime, fra di loro concatenate nelle più varie guise. Di guisa che, per tale duplice motivo, conseguenza finale del passaggio dal ragionamento concreto a quello astratto sia l'applicazione, resa possibile in sempre più larga misura nella scienza, del metodo deduttivo.

Ci resta ora perciò, — quasi diremmo *a riprova* della validità di questi risultati ora qui riassunti, ottenuti nei su citati tre nostri studî precedenti, — di passare all'esame, *sempre dal punto di vista prettamente psicologico,* del procedimento logico quale si manifesta nelle sue forme più elevate, rappresentate dal ragionamento matematico.

Sceglieremo, all'uopo, quattro fasi o momenti soltanto fra i più caratteristici dell'evoluzione di quest'ultimo, che potremo chiamare, rispettivamente, del simbolismo diretto, del simbolismo indiretto, della condensazione simbolica e della inversione simbolica. Questo ci permetterà anche di indagare le ragioni delle difficoltà speciali che lo studio delle matematiche presenta ai più, di mettere nel tempo stesso in evidenza il valore e l'importanza psicologica del simbolismo da esse ado-

perato, e di riconoscere così il valore e l'importanza diversi che il simbolismo ha nelle matematiche propriamente dette in confronto del valore e dell'importanza che esso può avere nella cosiddetta logica matematica.

Il ragionamento matematico nella sua fase del simbolismo diretto.

Dal puro *operare* l'uomo è passato solo a grado a grado al puro *ragionare*, per mezzo di serie miste costituite da esperienze effettivamente eseguite, alternate con altre semplicemente immaginate. E sono stati la geometria e il calcolo aritmetico che, nella scienza, hanno assunto per primi questo carattere misto e preparato così il terreno allo sbocciare e al fiorire più rigoglioso del puro ragionamento.

Le dimostrazioni geometriche, infatti, come già abbiamo visto nei su citati nostri studî precedenti, sono vere dimostrazioni sperimentali, vere catene di esperimenti, in cui, se la maggior parte di questi ultimi sono semplicemente pensati, altri però sono effettivamente eseguiti: « È appunto in questo campo così semplice, fertile e facilmente accessibile della geometria, — scrive il Mach, — che ha cominciato a svilupparsi il metodo tanto dell'esperimento fisico che di quello mentale ».[1]

Ma l'importanza della geometria non ha consistito soltanto nel preparare il passaggio dal puro operare al puro ragionare, bensì nell'abilitare e predisporre la mente al ragionamento astratto. Ciò che, infatti, caratterizza la geometria greca rispetto alla babilonese ed egiziana è appunto la generalizzazione della dimostrazione, il vedere nel triangolo disegnato, — sul quale sono state eseguite, in parte effettivamente ed in parte solo mentalmente, date operazioni geometriche conducenti alla constatazione, oculare o mentale, di dati risultati, — non già un triangolo particolare, bensì lo « schema » valevole per tutti quanti i triangoli; il riconoscere, cioè, l'equivalenza di tutti i triangoli rispetto ai risultati della dimostrazione stessa; e il dar luogo così alla formazione di concetti geometrici, i primi a svilupparsi nella storia della scienza.[2]

[1] Ernst Mach, *Erkenntnis und Irrtum*, Barth, Leipzig, 1906, pag. 198.

[2] Cfr. G. Milhaud, *Les origines des sciences mathématiques dans les civilisations orientales et égyptiennes: L'apport de l'Orient dans la science grecque;* in: *Nouvelles études sur l'histoire de la pensée mathématique*, Alcan, Paris, 1911, pag. 123-124.

Se le operazioni geometriche assunsero così solo tardi, presso i Greci, il loro carattere generale ed astratto, in compenso la proporzione di quelle semplicemente pensate rispetto alle altre effettivamente eseguite andò allora rapidamente crescendo, senza tuttavia arrivare ad escludere mai completamente queste ultime (p. es., tracciamento di linee ausiliarie e constatazione oculare di alcuni dei risultati così ottenuti).

Le operazioni di calcolo, invece, assunsero assai più per tempo un carattere astratto — di operazioni eseguite sull'oggetto schematizzato « unità » —; ma, viceversa, rimasero più a lungo allo stadio di operazioni quasi tutte effettivamente eseguite. Soltanto in seguito divennero esse pure serie miste di operazioni in parte effettivamente eseguite ed in parte semplicemente pensate; e presto allora passarono allo stadio di serie di operazioni *tutte quante semplicemente pensate;* stadio, questo, non mai raggiunto dalla geometria.

Il calcolo aritmetico ha, infatti, come è noto, cominciato ad essere una serie di « contazioni », ciascuna « contazione » essendo alla sua volta non altro che l'*operazione materiale di ordinamento degli oggetti da contare in corrispondenza di una serie già ordinata di altri oggetti;* serie, quest'ultima, sempre la stessa per tutte quante le « contazioni » (dita delle sole mani, dita delle mani e dei piedi, e simili).

Contazioni di un numero di oggetti, superiore al numero degli oggetti componenti la serie di confronto, incontrarono perciò difficoltà grandissime ad essere eseguite, fino a che non si ricorse al sistema di suddividere materialmente gli oggetti da contare in tanti gruppi, ciascun gruppo contenendo precisamente il numero massimo di oggetti suscettibile di essere « contato », e poi di « contare » i gruppi stessi. Metodo, questo, di divisione in tanti gruppi, che, esteso dagli oggetti ai primi gruppi di questi oggetti, e poi ai gruppi dei gruppi, forma tuttora, come è noto, la base della nostra contazione decimale.

Addizioni e sottrazioni di gruppi di oggetti già « contati » dovettero per necessità di cose venire di frequente materialmente eseguite; e i nuovi gruppi così ottenuti, sottoposti a nuove « contazioni », permisero di constatare *ocularmente* i risultati di queste addizioni e sottrazioni materiali.

Per facilitare tutte queste operazioni si può far corrispondere a ciascun oggetto, su cui si dovrebbe operare, un altro

oggetto più facilmente maneggiabile e trasportabile. Sorsero così le « tavole da calcolare » o « abbachi » (*ἄβαξ*, *abacus*), dalle primissime dell'antica Cina e degli antichi Peruviani a quelle decimali più perfezionate degli Egiziani, dei Greci e dei Romani, i cui filari di pietruzze (*calculi*) rappresentavano, a seconda del loro ordine e a seconda del numero di pietruzze spostato in ciascun filare, il numero dei gruppi e dei gruppi di gruppi in cui tutti gli oggetti da contare venivano suddivisi. Con questi abbachi, le operazioni di addizione e di sottrazione e di conseguente nuova contazione, rese più spedite, continuarono, in parte, ad essere effettivamente eseguite; ma per una parte sempre maggiore poterono venire eseguite solo mentalmente, grazie ai risultati già noti che le medesime operazioni, materialmente eseguite, avevano dato nel passato; finchè, per aumentare ancora la misura del vantaggio così ottenuto, si passò ad imparare a memoria delle tabelle già compilate, come l'antica e diffusissima piccola tabella d'addizione arrivante a $9 + 9$.

Agevolarono grandemente il passaggio all'esecuzione semplicemente mentale delle varie operazioni di addizione e sottrazione, già dunque eseguite dapprima materialmente colle pietruzze dell'abbaco, due sorta di invenzioni notevolissime in fatto di rappresentazione simbolica; ambedue, sembra, dovute agli Indiani: Anzitutto, quella di simboli grafici denotanti rispettivamente i varî numeri di pietruzze che potevano venire a trovarsi spostate sul rispettivo filare; e poi l'invenzione dello zero che permise di disporre questi simboli grafici uno accanto all'altro, nell'ordine stesso dei varî filari dell'abbaco, anche quando nessuno spostamento di pietruzze avesse avuto luogo in qualcuno di questi filari, permettendo così ad ogni numero di più cifre di rappresentare esattamente, — senza bisogno di alcuna indicazione speciale accanto a ciascuna cifra, — il corrispondente stato di distribuzione delle pietruzze nell'abbaco stesso.

Anche di quelle sorta particolari di addizioni e sottrazioni, infine, consistenti nell'addizione e sottrazione ripetuta un dato numero di volte sempre del medesimo numero di oggetti (moltiplicazione e divisione), i risultati finirono, sebbene molto più tardivamente e molto più difficilmente, a imprimersi essi pure nella memoria; e fu possibile così riassumerli in altre apposite tabelle, di cui la cosiddetta tavola pita-

gorica è l'esempio classico. E dalla moltiplicazione e divisione, una volta rese così sufficientemente famigliari, — e pel tramite dapprima delle frazioni radicali, cioè aventi per numeratore l'unità, che, p. es. presso gli antichi Egizi, si presentavano di per sè *materialmente,* nella misurazione dei successivi « avanzi » delle lunghezze non multiple esatte della unità di misura, col ripiegamento doppio, triplo, ecc., del nastro costituente appunto tale unità di misura, — fu possibile allora di passare, assai lentamente però, dal calcolo dei numeri interi a quello dei numeri frazionarî, i quali corrispondono essi pure non meno degli interi a quella realtà fisica del frazionamento di cui sono suscettibili una quantità di oggetti naturali.

Cosicchè il calcolo aritmetico oggi ormai non consta che di una serie di operazioni, tutte già materialmente eseguite nel passato, ed ora invece *tutte eseguite solo mentalmente.* Ma la lunga e lentissima evoluzione di questo passaggio, le difficoltà incontrate dai popoli primitivi per arrivare a « contare » un numero di oggetti superiore al numero delle dita della mano o delle due mani o delle mani e dei piedi, la lenta evoluzione degli abbachi e il loro perdurare stesso in tempi relativamente a noi recenti, la compilazione tanto tardiva e per tanto tempo oltremodo imperfetta delle « tabelle » mnemoniche di addizione e poi di quelle di moltiplicazione, la lentissima evoluzione del calcolo frazionario, tutto ciò sta a denotare le difficoltà grandissime che l'uomo ha dovuto superare per scoprire *empiricamente, uno ad uno,* i varî risultati di date operazioni di calcolo, prima di potere arrivare a compiere queste operazioni solo mentalmente. [1]

Nel tempo stesso questo denota come « le proprietà dei numeri siano dipendenti dall'esperienza, nel medesimo preciso senso che quelle geometriche dello spazio ». [2]

A noi importa qui di rilevare come gli oggetti di quella serie ordinata in corrispondenza dei quali venivano materialmente disposti gli oggetti concreti da contarsi, pel fatto appunto di essere sempre i medesimi quale che fosse la specie di questi ultimi, dovette agevolare la constatazione che i risultati del calcolo erano sempre gli stessi, indipendentemente

[1] Cfr., p. es., H. G. Zeuthen, *Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter* (« Die Kultur der Gegenwart », Teil III, Abteilung I, Lieferung I), Teubner, Leipzig, 1912, pag. 6-14.

[2] W. Wundt, *Logik*, 3. Auflage, I. Band, Enke, Stuttgart, 1906, pag. 488-489.

dalla natura di questi oggetti da contarsi; cioè a dire, che, rispetto ai risultati del calcolo, qualsiasi sorta di oggetti concreti era *equivalente* a qualsiasi altra; e tale constatazione doveva quindi di per sè condurre, come infatti condusse, molto per tempo, al concetto di *unità* (e quindi a quello di « numero astratto » che ne deriva), cioè di *oggetto schematizzato* (dita della mano, pietruzze dell'abbaco, ecc.), rappresentante indifferentemente tali o tali altri oggetti concreti (capi di bestiame, guerrieri della tribù, ecc.): « Il termine estremo dell'astrazione numerica è la nozione di unità. Ciascuna unità è supposta identica a un'altra unità, cioè a dire la mente non si arresta più sopra alcuna determinazione specifica, sopra alcun carattere intrinseco della cosa, essa non conosce più niente dell'oggetto all'infuori del fatto di considerarlo come oggetto ». [1]

Ma questo termine estremo dell'astrazione numerica, l'*unità,* non cessò per questo di essere *un oggetto,* generalissimo o schematizzato quanto si voglia, ma pur sempre *materialmente tangibile,* quali erano appunto le dita della mano o le pietruzze dell'abbaco. E le operazioni di calcolo aritmetico furono così, per lunga epoca, *delle operazioni astratte e nel tempo stesso materialmente eseguite.*

Ma, come vedemmo, dall'essere le operazioni di calcolo da principio tutte operazioni materialmente eseguite, passarono poi gradualmente ad essere serie miste di operazioni in parte materialmente eseguite ed in parte semplicemente pensate, per arrivare infine ad essere, come lo sono oggi, serie di operazioni tutte quante semplicemente pensate; senza che in questo successivo passaggio venisse affatto a mutarsi il loro carattere di operazioni materialmente eseguibili o materialmente pensabili, che esse possedevano fino dal principio malgrado il loro carattere astratto. [2]

Veniamo ora al passaggio dall'aritmetica alla prima fase dell'algebra, — alla fase, cioè, anteriore all'introduzione dei numeri positivi e negativi. Come è noto, esso si compie per un processo di astrazione ulteriore, del tutto simile a quello

[1] Léon Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique,* Alcan, Paris, 1912, pag. 479.

[2] Cfr. John Stuart Mill, *A System of Logic ratiocinative and inductive,* Seventh Edition, Longmans Green, London, 1868, Vol. I, pag. 284 e seg.

ora visto che ha costituito il passaggio dai numeri concreti ai numeri astratti: Prendiamo, p. es., il numero 8 e la frazione $\frac{1}{8}$; aggiungiamo 1 ad ambedue; la somma maggiore così ottenuta $(8 + 1 = 9)$ contiene la minore $\left(\frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}\right)$ esattamente 8 volte. Ora questa proprietà è posseduta da ogni numero, non dal numero 8 soltanto. Quindi se denotiamo con a un numero qualsiasi, si ha sempre:

$$\frac{a + 1}{\frac{1}{a} + 1} = a.$$ [1]

Rispetto al risultato espresso da tale formula, come rispetto agli altri risultati consimili perseguiti dal calcolo algebrico, tutti i numeri aritmetici astratti sono dunque fra loro *equivalenti;* e « numero algebrico » è appunto il termine che si adopera per esprimere indifferentemente uno qualsiasi di essi, cioè a dire per esprimere il numero aritmetico astratto « schematizzato ».

La differenza fra il calcolo algebrico e quello aritmetico, — prima, ripetiamo, dell'introduzione nel primo dei numeri positivi e negativi, — sta per conseguenza in questo: che mentre il calcolo aritmetico consta *di operazioni concrete su oggetti astratti* (quali, per es., le pietruzze dell'abbaco rappresentanti l'« unità » schematizzata), in quello algebrico, invece, *le operazioni stesse sono astratte,* cioè rappresentano ciascuna, non già una sola ben determinata operazione, *ma infinite operazioni, equivalenti* rispetto a un dato risultato.

La difficoltà psicologica ad elevarsi a tale astrazione ulteriore è dunque della stessa natura di quella che s'incontra nella geometria quando in una data operazione eseguita p. es. sopra un dato triangolo si deve vedere, non già questa sola operazione, ma tutte le infinite operazioni consimili eseguite su altrettanti infiniti triangoli, e tutte equivalenti fra loro rispetto al risultato ottenuto dalla dimostrazione eseguita sul triangolo particolare disegnato sul foglio. [2]

[1] Cfr. PHILIP E. B. JOURDAIN, *The Nature of Mathematics*, Jack, London, 1910, pag. 30, 32-33.

[2] Cfr. E. GOBLOT, *La démonstration mathématique*, « Année Psychologique », quatorzième année, Alcan, Paris, 1898, pag. 272, 275-276.

In questo, anzi, l'algebra ha un grande vantaggio rispetto alla geometria, *consistente nel fatto che coi suoi simboli letterari essa riesce a mettere bene in evidenza le qualità generali degli oggetti su cui opera e ad eliminarne le qualità particolari.* Mentre il geometra, infatti, per estendere a tutti i triangoli in genere i risultati di una dimostrazione eseguita sopra un dato triangolo particolare, deve sorvegliare ad ogni passo della dimostrazione che essa sia ottenuta, e poi tener sempre presente che essa è stata ottenuta, senza mai far ricorso nè al valore particolare dei singoli angoli, nè alla lunghezza assoluta o relativa dei singoli lati, e così via, — nè può, per mettere in evidenza questo, fare ricorso *a un simbolo del triangolo* o di qualsiasi altra figura geometrica, che scarti di per sè gli elementi particolari da cui la figura stessa può venire caso per caso ad essere formata, — l'algebrista, invece, pone subito in evidenza che un dato risultato d'una data dimostrazione è indipendente dal valore particolare dei numeri sui quali ha operato, grazie al rappresentarli che fa, prima della dimostrazione stessa, a mezzo dei noti simboli alfabetici.

Qui c'importa sopratutto di rilevare che ciascuna delle infinite operazioni particolari, rappresentate da una data operazione algebrica, resta però pur sempre un'operazione di calcolo aritmetico vero e proprio, cioè un'operazione materialmente eseguibile ed eseguita solo invece mentalmente; e che, quindi, esclusivamente di tali operazioni viene ad essere costituito anche il calcolo algebrico stesso. Il quale, perciò, — prima, lo ripetiamo ancora, dell'introduzione dei numeri positivi e negativi, — non è che la simbolizzazione, a mezzo di opportune formule, di una lunga serie di tali operazioni od esperienze quantitative, materialmente eseguibili ed eseguite solo mentalmente, concatenate le une alle altre.

Questo carattere delle espressioni algebriche di rappresentare, non già una sola operazione esprimente lo stabilirsi di una relazione quantitativa soltanto, bensì infinite operazioni consimili, equivalenti rispetto a un dato risultato, è ciò che fa sì che l'algebra si presti meravigliosamente ad esprimere tutte quelle « leggi naturali » che reggono le relazioni quantitative fra i fenomeni e a dedurre tutte le più lontane conseguenze che derivano da queste leggi. Infatti, appunto perchè « leggi » reggenti le relazioni quantitative fra i fenomeni, esse valgono, non già soltanto per questo o quel valore

particolare dei fenomeni stessi, bensì per tutta un'infinita serie di tali valori particolari.[1]

Ogni formula algebrica od uguaglianza fra formule algebriche viene allora a costituire, come bene avverte il Mach, una specie di regola compilativa *(eine Herstellungsregel)* di una sterminata tabella riassumente l'andamento di un dato fenomeno in tutte le sue manifestazioni particolari; regola compilativa, che fornisce così, già belli e pronti, con grande « economia » di tempo e di lavoro, i singoli risultati di un'infinità di operazioni od esperienze fisiche che eventualmente possano da noi venire eseguite mentalmente.[2]

Così, p. es., la formula algebrica che esprime la legge di Newton dell'attrazione è la traduzione del fatto generale della gravità in un linguaggio che ne esprime anche tutti i casi particolari.[3]

Questo stesso carattere delle espressioni algebriche di rappresentare, non già un'operazione di calcolo aritmetico sola, bensì infinite operazioni equivalenti rispetto a un dato risultato, fa sì che quando già si pervenga a dimostrare la uguaglianza di date espressioni complicate con altre più semplici, — p. es. l'uguaglianza $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$, — questo costituisca, come fa rilevare il Mach, una grande « economia del conteggio », in quanto permette di risparmiare tutte quelle particolari serie di calcolo aritmetico, ciascuna delle quali condurrebbe, per suo conto, alla verificazione dell'uguaglianza medesima nel caso particolare da essa rappresentato.[4]

Il fatto, infine, che l'algebra, in ciò più fortunata della geometria, è riuscita a mettere in evidenza, coi suoi simboli letterali, le qualità generali degli oggetti su cui opera e ad eliminarne le qualità particolari è ciò che ha permesso e facilitato la « meccanizzazione » del calcolo algebrico stesso.

Con ciò non vogliamo tanto alludere all'aiuto e al « riposo » che l'algebra, come qualsiasi altro metodo di notazione simbolica in genere, dà al ragionatore nel tener dietro a tutta

[1] Cfr. Ph. E. B. Jourdain, op. cit.: *The Nat. of Math.*, pag. 47-48.

[2] Ernst Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*, Siebente Auflage, Leipzig, Brockhaus, 1912, pag. 137-138 e 461.

[3] G. Milhaud, *Descartes et Newton*, in op. cit.: *Nouv. ét. sur l'hist. de la pensée scient.*, pag. 222.

[4] E. Mach, op. cit.: *Die Mechanik* etc., pag. 462; lo stesso, op. cit.: *Erkenntnis u. Irrtum*, p. 328.

la storia delle operazioni od esperienze, eseguite mentalmente, costituenti un dato qualsiasi ragionamento. Non è che troppo noto, infatti, come il ricorso ad appropriati simboli, relativi alle varie operazioni e ai rispettivi risultati, liberi la mente del ragionatore dal bisogno e dallo sforzo di tenere sempre vivo dinanzi a sè il ricordo dei risultati precedenti, che poi gli serviranno in seguito quando il « filo del ragionamento » lo condurrà ad eseguire mentalmente altre operazioni od esperienze concatenate con questi risultati; e come questo impedisca inevitabili dimenticanze, che altrimenti si avrebbero di alcuni di questi risultati già ottenuti, e inevitabili *conclusioni illogiche* relative.

Intendiamo piuttosto alludere al fatto che, grazie alla generalità stessa dei simboli algebrici e delle relative operazioni che essi stanno a rappresentare, queste operazioni occorrono e si ripetono sempre le medesime in un numero grandissimo di occasioni; il che rende possibile e facilita la scoperta di date regole per la *manipolazione pratica* di questi simboli, conformandosi e affidandosi alle quali si può essere sicuri di arrivare alla conclusione giusta del ragionamento, senza più pensare affatto al significato dei simboli stessi. Ciò che produce un conseguente notevolissimo risparmio di tempo e di fatica mentale.[1]

« Si è spesso fatto osservare, — scrive Pierre Boutroux, — che le matematiche, opera dell'intelligenza attiva, tendono a rendere l'intelligenza inutile, riducendo i ragionamenti a delle regole che si lasciano applicare passivamente ».[2]

« Questa manipolazione dei simboli algebrici che, nel più largo significato della parola, si può chiamare il *calcolo,* presuppone — scrive alla sua volta il Duhem — in colui che la crea come in colui che la impiega, non tanto la potenza di astrarre e la capacità di svolgere con ordine i propri pensieri, quanto l'attitudine a rappresentarsi le combinazioni diverse e complicate che si possono formare con certi segni visibili e tracciabili, a vedere di colpo le trasformazioni che permettono di passare da una combinazione all'altra ».[3]

[1] Cfr. J. Stuart Mill, op. cit.: *A System of Logic*, vol. II, pag. 260; E. Mach, op. cit.: *Erk. u. Irrtum*, pag. 182; Ph. E. B. Jourdain, op. cit.: *The Nat. of Math.*, pag. 20, 53.

[2] Pierre Boutroux, *L'évolution des mathématiques pures*, « Scientia », 1909, XI-3, pag. 3-5.

[3] Pierre Duhem, *La théorie physique, son objet et sa structure*, Chevalier & Rivière, Paris, 1906, pag. 98-99.

Alle esperienze semplicemente immaginate, *rappresentate* dalle trasformazioni algebriche, si aggiungono, così, nuove esperienze effettivamente eseguite, *costituite* dalle trasformazioni algebriche stesse. Ciò che rende possibile la constatazione oculare o scoperta empirica di continui nuovi risultati di queste manipolazioni di formule, i quali si risolvono alla loro volta in altrettanti risultati nuovi del ragionamento rappresentato appunto da tale calcolo algebrico: « Nella matematica l'esperienza prende spesso un significato speciale, come quando si riduce alla constatazione della forma di una espressione algebrica ».[1]

Da ciò il grande valore che ha, anche nelle matematiche, quel « senso di posizione », che è caratteristico dei grandi giuocatori di scacchi, e che nell'algebra conduce a scoprire l'analogia fondamentale di date espressioni algebriche per quanto complicate e diverse nei particolari esse siano.[2]

Date « situazioni algebriche », anche molto complesse, divengono così suscettibili di essere considerate *conglobalmente,* indipendentemente dai loro elementi costitutivi, e di essere conseguentemente rappresentate da nuovi appositi simboli. Le regole di trasformazione analitica, applicabili a questi simboli di grado superiore, scoperte e fissate a mezzo delle operazioni di calcolo che si sanno già eseguire sui simboli di grado inferiore, permettono allora al matematico di procedere da ora in poi alle operazioni su tali simboli di grado superiore, senza più neppure preoccuparsi del significato che esse avrebbero se « tradotte » nelle operazioni equivalenti, ben più lunghe e complicate, espresse nei simboli di grado inferiore.

A coloro che non riescono più a « vedere » dietro ai simboli superiori il complesso dei simboli inferiori e dietro ai simboli inferiori il complesso delle operazioni reali d'ordine generale da essi rappresentato, la matematica può allora sembrare, veramente, di essersi del tutto emancipata da quelle antiche operazioni di calcolo materiali, prima effettivamente eseguite e poi semplicemente pensate, dalle quali ha spiccato il suo ardito volo. È chiaro tuttavia, come lo dimostrano gli stessi brevissimi cenni ora fatti sopra la origine e lo sviluppo

[1] G. Milhaud, *La pensée mathématique, son rôle dans l'histoire des idées;* in op. cit.: *Nouv. ét. sur l'hist. de la pensée scient.*, pag. 24.

[2] Alfred A. Cleveland, *The Psychology of Chess and of Learning to play it*, « The American Journal of Psychology », July 1907, pag. 299.

del calcolo algebrico, che queste operazioni od esperienze antiche materiali continuano invece a costituirne pur sempre l'intero ed unico sostrato.

Senonchè, se così è, allora anche ogni passaggio o risultato intermedio di qualsiasi trasformazione algebrica non può a meno di avere, esso pure, più o meno direttamente o indirettamente, un significato « reale », cioè a dire *empiricamente tangibile ed empiricamente esatto,* in quanto rappresenta il risultato di questa o quella tappa nella serie delle operazioni od esperienze materiali, semplicemente pensate, costituenti il ragionamento matematico esplicantesi in tale trasformazione algebrica. Invece, come a tutti è noto, alcuni risultati intermedî del calcolo algebrico, presentantisi a primo aspetto come espressioni prive di alcun « significato reale », sembrarono nei secoli scorsi non avere tale requisito e trasgredire così a questa regola fondamentale di ogni e qualsiasi ragionamento.

Lo studio pertanto di queste espressioni o quantità « immaginarie », e un cenno delle difficoltà da esse incontrate prima di ottenere il pieno e indiscusso diritto di cittadinanza, non potranno mancare, *sempre dal punto di vista prettamente psicologico dal quale ci poniamo in questi nostri studî sul ragionamento,* di un certo interesse, e non saranno inutili al nostro scopo di spingere ancora più a fondo l'analisi della natura psicologica del ragionamento matematico in genere.

Ma per procedere all'esame di queste quantità « immaginarie », dovremo naturalmente dire prima alcune parole sui numeri positivi e negativi e sul *simbolismo indiretto,* che essi sono venuti a costituire.

Il ragionamento matematico nella sua fase del simbolismo indiretto.

È noto come, se non tutte le grandezze, un numero notevole almeno di esse, siano suscettibili di presentarsi sotto un duplice aspetto, che i matematici hanno appunto chiamato « positivo » e « negativo ». Un esercito di 100.000 uomini non può perderne in battaglia 120.000, ma un possessore di 100.000 lire può perderne benissimo 120.000 al giuoco; da una botte contenente 10 litri di vino non possiamo toglierne 12 litri, mentre possiamo benissimo abbassarne di 12 gradi la temperatura iniziale, anche se questa era di 10 gradi soltanto. Le

20.000 lire perse al giuoco in più di quelle che sono state potute pagare e i due gradi di raffreddamento ulteriore in più dei primi dieci rappresentano grandezze dello stesso genere di quelle iniziali, solo di « senso opposto ».

A rappresentare queste grandezze fisiche, così suscettibili di una relazione di opposizione, non possono evidentemente più bastare i simboli aritmetici, nè i corrispondenti simboli algebrici, finchè anche questi si limitino, come gli aritmetici, a rappresentare semplicemente il numero delle unità di misura che in tali grandezze sono contenute. Per fornire una rappresentazione simbolica di questi fatti fisici, suscettibili ad un tempo di « grandezza » e di « opposizione », è d'uopo ricorrere a un *simbolismo geometrico,* a mezzo di segmenti presi tutti sopra un'unica e medesima retta, la lunghezza dei quali fornisca la rappresentazione simbolica della grandezza del fatto fisico rispettivo, e la direzione dei quali fornisca rispettivamente quella dell'uno o dell'altro « senso », fra loro in opposizione, che il fatto fisico stesso è suscettibile di assumere.

Stabilita questa rappresentazione simbolica, *di natura geometrica,* per tali grandezze fisiche, tutti gli avvenimenti relativi ad esse, che non ne mutino sostanzialmente il carattere, cioè che non consistano che in cambiamenti nella grandezza assoluta o nel « senso », potranno venire rappresentati a mezzo di direzioni opportune, nell'un senso o nell'opposto, date ai diversi segmenti, e a mezzo dei relativi *scorrimenti* o *slittamenti* eseguiti lungo la retta che li contiene. E dalle proprietà, verificate empiricamente come inerenti a tali mutazioni della grandezza fisica, dipenderanno poi date regole di scorrimento, adatte a dare la rappresentazione simbolica delle mutazioni stesse.

P. es., per rappresentare simbolicamente il fatto che un mobile, partito adesso da zero lungo una retta con velocità uniforme v, si troverà, dopo un tempo t, nello stesso punto della retta dove si trovava, t secondi fa, un secondo mobile che, movendosi colla velocità medesima ma in opposto senso, si trova ora nel punto zero, occorrerà rappresentare il moto del primo corpo col riportare, partendosi dallo zero, il segmento rappresentante in grandezza e in direzione la velocità v tante volte *in avanti,* cioè secondo la direzione stessa d'un tale segmento, quante sono le unità di tempo *futuro* espresse dal numero t; e rappresentare, invece, il moto dell'altro corpo

col riportare, sempre partendosi da zero, lo stesso segmento rappresentante la stessa grandezza di velocità, la direzione del quale è ora opposta a quella di prima, tante volte *all'indietro,* cioè nella direzione opposta a quella attuale del segmento, quante sono le unità di tempo *passato* espresse dallo stesso numero t.

Una volta così fissate questa e le altre consimili regole per tali scorrimenti di segmenti, da eseguirsi tutti sopra un unico e medesimo asse, in modo da costituire una rappresentazione simbolica delle grandezze fisiche suscettibili di « opposizione » e dei loro avvenimenti, sorge la questione di vedere se è possibile *rappresentare simbolicamente, alla loro volta, questi scorrimenti di segmenti sopra un asse, a mezzo di convenienti segni algebrici.* Il che si è ottenuto, come è noto, indicando colle solite lettere dell'alfabeto le lunghezze assolute dei segmenti, assegnando i segni + e — a queste lettere a seconda che le direzioni dei rispettivi segmenti siano rivolte verso destra o verso sinistra, e indicando parimente con gli stessi segni + e — le operazioni geometrico-cinematiche di scorrimento a seconda che esse siano di *avanzamento* o di *retrogradamento,* cioè a seconda che esse siano da farsi nello stesso senso o in senso contrario alla direzione che è propria del segmento da far scorrere.

In tal modo, il duplice scorrimento, p. es., ora ricordato, atto a costituire la rappresentazione simbolica geometrica del duplice fatto fisico di movimento dei due corpi e del rispettivo risultato finale, diviene suscettibile, alla sua volta, della rappresentazione simbolica algebrica ben nota: $(-t)(-v)=vt$; la quale dà luogo alla « regola dei segni » in generale, che il prodotto di due quantità negative è un numero positivo.

Questa e le altre « regole dei segni », dunque, da osservarsi nelle manipolazioni dei simboli algebrici, sono quali sono, unicamente onde rendere atte queste operazioni algebriche a rappresentare simbolicamente quegli scorrimenti di segmenti, i quali, alla loro volta, sono stati verificati stare a rappresentare le esperienze fisiche. Ne consegue che, mentre le retrogradazioni e gli avanzamenti di segmenti, scorrenti tutti sopra un unico e medesimo asse, costituiscono la rappresentazione simbolica *diretta* o *di primo grado* di operazioni od esperienze fisiche, eseguite effettivamente o da eseguirsi mentalmente sulle grandezze rappresentate da tali segmenti; le operazioni

algebriche, invece, da eseguirsi sulle lettere rappresentative di tali segmenti, conforme alle fissate regole dei segni, sono bensì, alla loro volta, rappresentazioni simboliche dirette o di primo grado di tali operazioni di scorrimento di segmenti, ma, per ciò stesso, rappresentazioni simboliche solo *indirette* o *di secondo grado* delle operazioni od esperienze fisiche medesime.

In altre parole, l'ammissione concessa nelle matematiche anche alle grandezze fisiche suscettibili di opposizione ha reso necessario il ricorso *a un simbolismo geometrico intermediario*, mercè il quale l'algebra si è trasformata appunto in rappresentazione simbolica solo indiretta o di secondo grado del fatto fisico.

Per la constatazione poi fatta che i numeri aritmetici ordinari, o le lettere suscettibili di rappresentarli, sebbene non bisognosi di per sè stessi di un tale simbolismo geometrico intermediario in quanto simboli diretti sufficienti per tutte le quantità non suscettibili di opposizione, potevano però venire da esso sostituiti, e precisamente mediante segmenti tutti rivolti verso destra, condusse ad adottare questo simbolismo geometrico intermediario, e il conseguente simbolismo algebrico di secondo grado, anche per loro. Questo fece sì che le regole del calcolo algebrico, trovate per le quantità suscettibili di opposizione, vennero a valere senz'altro anche per quelle non suscettibili di opposizione o aritmetiche propriamente dette, purchè queste ultime — le quali, finchè puramente aritmetiche, non sono nè positive nè negative — venissero considerate come positive. Con ciò tutte le quantità, tanto quelle suscettibili quanto quelle non suscettibili di opposizione, vennero ad essere *equivalenti* dal punto di vista delle rispettive operazioni formali di calcolo, per le quali valevano medesime leggi o norme. Ed è in tale equivalenza, così riscontrata, che ha consistito il nuovo concetto allargato di « numero », dal concetto puramente aritmetico a quello algebrico.

A noi qui preme porre in rilievo che tutte le difficoltà ad essere compresi incontrate al loro sorgere dai numeri positivi e negativi, in ispecie relativamente alle regole dei segni che dovevano osservarsi nelle loro manipolazioni, sono appunto dipese dal non averne da principio intravveduto l'intima natura di rappresentazione simbolica solo indiretta: « I numeri negativi hanno sempre dato luogo a preoccupazioni ». — « Spe-

cialmente la regola che il prodotto di due numeri negativi è un numero positivo ha incontrato sempre delle difficoltà, che si poterono bensì nascondere, ma non superare. Si arrivò persino, come p. es. il gesuita Clavius (1612), a considerare tutte queste regole dei segni, come in realtà giuste, ma nel tempo stesso come assolutamente incomprensibili ».[1]

Tali difficoltà ad essere compresi e le conseguenti ostilità, talora anche vivacissime, incontrate nei primi tempi da questi nuovi numeri, sono spiegabili ove si pensi che il simbolismo matematico divenendo con essi indiretto, cioè simbolismo di simbolismo, ha reso tanto più complicatamente mediata la relazione che lo collega al fatto fisico, sì che altrettanto più difficile riesce di « vedere » quest'ultimo dietro le trasformazioni del simbolismo stesso. Esse denotano, nel tempo stesso, come la mente umana si ribelli istintivamente a qualsiasi manipolazione simbolica, ancorchè retta da regole precise che si addimostrino atte a condurre a risultati verificati in seguito dall'esperienza come giusti, se dietro ad essa e ad ogni sua minima fase non vede nettamente l'operazione od esperienza effettiva, cioè empiricamente tangibile ed empiricamente esatta, che la manipolazione simbolica stessa sta a rappresentare.

Ma questo è quanto ci risulterà in modo ancora più evidente se ora passiamo, sia pure con non minore brevità, all'esame dei cosiddetti numeri « immaginarî ».

Abbiamo visto come per le regole stesse stabilite circa la rappresentazione simbolica geometrica delle grandezze fisiche suscettibili di opposizione e dei loro avvenimenti, e per la corrispondenza fissata fra tale rappresentazione simbolica geometrica e quella algebrica a mezzo dei « numeri » positivi e negativi, il prodotto di due numeri negativi sia sempre un numero positivo. Ciò esclude, come è noto, la possibilità che il calcolo algebrico, finchè si mantiene rappresentazione simbolica indiretta di fatti fisici reali, possa mai condurre ad espressioni costituite da radicali quadrati di numeri negativi.

Eppure queste espressioni non mancarono di presentarsi. Ed è noto come nei primi tempi gli algebristi, anzichè fermarsi dinanzi ad esse, continuarono ad usarle, sottomettendole

[1] A. Voss, *Über das Wesen der Mathematik*, 2 Auflage, Teubner, Leipzig, 1913, pag. 36-37.

a date regole assiomatiche di manipolazione, fissate in modo da non condurre mai ad alcuna contraddizione e da assicurare la permanenza delle leggi formali del calcolo algebrico; mentre come guida rischiaratrice del cammino da seguirsi in queste manipolazioni algebriche « senza senso » — senza la quale sarebbero inevitabilmente degenerate in un giuoco puerile di arte combinatoria di segni grafici — servì lo scopo che ogni algebrista implicitamente sempre si prefiggeva, cioè di pervenire in un modo o nell'altro ad eliminare queste espressioni « senza senso » per giungere di nuovo ad espressioni solo reali.[1]

Questa autonomia di cui è stato suscettibile l'algoritmo matematico di fronte alla realtà che esso doveva rappresentare, questa introduzione e questa applicazione di dati procedimenti simbolici prima ancora che se ne comprendesse il significato, questo fatto, apparentemente così paradossale dal punto di vista psicologico, si spiega col processo sopra rammentato di meccanizzazione del calcolo algebrico. L'abitudine, infatti, al maneggio di un simbolismo molto sviluppato dispensa a lungo andare dal tener fiso continuamente lo sguardo alla realtà che esso rappresenta; e questo rende possibile, perchè quasi inavvertita, l'introduzione e la manipolazione anche di simboli « vuoti di contenuto ».

Si può dire, anzi, che, in grazia di questa meccanizzazione del calcolo, il simbolo, che per solito, come abbiamo visto nei nostri studi precedenti, ha una funzione semplicemente passiva di « registrazione » dei concetti trovati indipendentemente da esso, abbia qui avuto anche una funzione attiva, in quanto i nuovi concetti, capaci di dare un significato ad enti algoritmici ottenuti quasi diremmo fortuitamente per via d'una pura e semplice prolungazione meccanica del calcolo (i radicali quadrati, p. es., di espressioni *eventualmente* negative), non hanno potuto cominciare a formarsi e a chiarirsi se non dopo avere sviluppato gran parte delle conseguenze derivanti dalla introduzione del nuovo ente algoritmico, privo ancora di significato.

Ma che questo non implichi affatto che si possa in fondo fare a meno d'un vero e proprio significato dei simboli, e che

[1] Cfr., p. es., D. Gigli, *Dei numeri complessi a due e a più unità*, in: *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, raccolte e coordinate da F. Enriques, vol. I, Zanichelli, Bologna, 1912, pag. 515-516.

basti fissare per questi ultimi date regole assiomatiche di collegamento o di manipolazione, affinchè, grazie a queste « definizioni implicite » dei simboli stessi, si possa costruire su di essi tutta la matematica, che questa opinione, condivisa da non pochi matematici, sia psicologicamente del tutto errata, è quanto è dimostrato appunto da questi enti algoritmici « privi di senso ».

Nelle prime teorie relative ad essi, infatti, abbiamo, precisamente, che le condizioni per la definizione implicita di simboli a mezzo di date regole di calcolo sono completamente soddisfatte. Ma è nota l'accoglienza che ebbero questi « entia rationis » finchè rimasero a tale stadio di definizione puramente formale. I conflitti e le discussioni senza fine da essi provocati, il loro rigetto da parte dei maggiori matematici del tempo, i termini quasi diremmo *ingiuriosi* ad essi dati (numeri « immaginarî », soluzioni « finte », quantità « impossibili », enti « anfibi », « mostruosi », e via dicendo) denotano la ribellione energica del buon senso comune a trattare con relazioni fra dati segni grafici regolate da determinate norme convenzionali, se prima non ne afferra il significato. Denotano, in altre parole, il bisogno imprescindibile della mente umana, quale conseguenza diretta della natura fondamentale di ogni e qualsiasi ragionamento, di considerare il simbolo sempre come tale, cioè sempre come rappresentante d'una realtà fisica, e quindi anche ogni operazione su di esso sempre come rappresentatrice simbolica d'una operazione parimente reale.

Ond'è che i numeri immaginarî non hanno acquistato diritto di cittadinanza se non quando si è riusciti a dare anche ad essi un significato *reale,* e precisamente quello, come è noto, di *rappresentazione analitica della direzione.* [1]

Grazie alla concezione di Argand, scrive l'Hoüel nella sua prefazione alla riedizione dell'*Essai* di quest'ultimo, « i simboli della forma $a + b\sqrt{-1}$, ai quali si era riusciti a ricondurre i risultati di tutte le operazioni analitiche, non presentano più niente di impossibile o di incomprensibile »; essi vengono così « a tradursi *per mezzo di costruzioni geometriche parlanti agli occhi* ». [2]

[1] Cfr. A. Voss, op. cit.: *Über das Wesen der Math.*, pag. 38-41.

[2] J. Hoüel, préface à la réédition de: R. Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (1806), Gauthier-Villars, Paris, 1874, pag. XIII.

È noto, infatti, come il simbolo $i = \sqrt{-1}$ esprima, in tal saggio di Argand, *la relazione di perpendicolarità;* come, cioè, a e ia non siano che simboli di vettori fra loro perpendicolari. Moltiplicare un vettore per i significa, quindi, semplicemente, ruotarlo d'un angolo retto attorno alla sua origine. Ogni espressione algebrica complessa, cioè composta di numeri reali e di numeri immaginarî, viene così a rappresentare determinate relazioni geometriche di segmenti giacenti sopra un piano; ed ogni operazione fra numeri complessi acquista il significato *di una costruzione geometrica,* mediante la quale, in un piano, da dati vettori se ne ottengono altri. L'algebra diviene in tal modo un sistema grandioso *di traduzione* che permette di esprimere le più svariate operazioni geometriche di scorrimenti e di rotazioni di segmenti sopra un piano con corrispondenti manipolazioni algoritmiche.

Prendiamo, p. es., le due espressioni, reale la prima, « immaginaria » la seconda: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$. Esse, come qualsiasi altra equazione od uguaglianza matematica, non fanno che esprimere il fatto che un dato numero al quale si è arrivati in un dato modo è uguale ad altro numero al quale si è giunti per via diversa. Solo che la prima ci dice che il punto al quale si perviene sull'asse dei segmenti a e b, mediante i tre *scorrimenti* rappresentati rispettivamente da $a \times a$, $b \times b$, e $a^2 - b^2$, può essere ottenuto anche mediante altri tre scorrimenti, di natura analoga ai precedenti, rappresentati rispettivamente da $a + b$, $a - b$, e $(a + b)(a - b)$. Mentre la seconda ci avverte che per il punto $a^2 + b^2$ questo secondo modo di giungervi non sussiste, *se non si vuole uscire dall'asse dove giacciono i segmenti stessi* a e b; ma che ne sussiste uno corrispondente, *purchè si esca da quest'asse.* Per il significato, infatti, di operazioni di scorrimento e di rotazione di segmenti che vengono ora ad avere le formule algebriche contenenti espressioni « immaginarie », la formula $(a + ib)(a - ib)$ viene a rappresentare la costruzione di due cateti tali che il rispettivo triangolo rettangolo viene ad avere per ipotenusa il segmento appunto $a^2 + b^2$; di guisa che con tale costruzione si finisce coll'arrivare sull'asse dei segmenti al punto estremo stesso del segmento $a^2 + b^2$.

Le operazioni geometrico-cinematiche rappresentate dai « numeri » complessi, cioè costituiti da numeri reali e da numeri « immaginarî », sono pertanto *infinitamente più numerose*

e più svariate di quelle rappresentate da numeri « reali » soltanto, in quanto che queste ultime, non consistendo che in *scorrimenti* di segmenti lungo un asse, non permettono di uscire da esso, mentre le prime, che agli scorrimenti aggiungono le rotazioni, permettono di estendersi sopra tutto un piano e rendono così possibile di scoprire, fra i segmenti stessi dell'asse dai quali le operazioni da eseguirsi sul piano si partono, un gran numero di relazioni che non sarebbe stato possibile di scoprire limitandosi ai soli scorrimenti.[1]

Le operazioni geometrico-cinematiche rappresentate dai numeri complessi sono, inoltre, *d'ordine più generale,* in quanto che comprendono, come loro caso particolare, quelle di semplice scorrimento di segmenti tutti lungo un medesimo asse. Nel tempo stesso, il simbolismo algebrico atto a darne la rappresentazione analitica, costituito dai « numeri » complessi, soddisfa completamente al già sopra rammentato principio *di permanenza delle leggi formali,* o *di immutabilità dell'insieme delle proprietà simboliche;* cioè valgono per esso e per le sue manipolazioni, nonostante il mutato od ampliato significato, tutte le proprietà e norme che valgono per il simbolismo e per le manipolazioni relativi ai numeri reali. Di guisa che, rispetto al risultato formale di qualsiasi manipolazione di simboli algebrici, — e l'algebra, come dice benissimo il Goblot, « non ha altro oggetto che la *forma* delle espressioni algebriche », — i « numeri » tanto immaginarî che complessi risultano *equivalenti* a quelli reali; ed è in tale equivalenza rispetto a risultati formali di calcolo, ed esclusivamente in essa, che ha consistito, ancor qui, l'allargamento corrispondente del concetto di « numero ».[2]

Tanto che un allargamento ulteriore del concetto di numero a nuovi simboli, traduttori analitici di analoghe operazioni geometrico-cinematiche vettoriali estese a tutto lo spazio non è stato, propriamente parlando, come è noto, possibile, precisamente pel fatto che tali simboli, non potendo soddisfare completamente al suddetto principio della permanenza delle leggi formali, non possono apparire per ciò stesso equivalenti ai numeri reali, immaginarî e complessi rispetto a tutti quanti i risultati formali delle rispettive operazioni di calcolo.

[1] Cfr. A. Voss, op. cit.: *Über das Wesen der Math.*, pag. 58.
[2] Cfr. E. Goblot, saggio cit.: *La démonstr. math.*, pag. 275-276.

Infine, è evidente che le operazioni geometrico-cinematiche di scorrimento e di rotazione, rappresentate dai numeri « immaginarî » e dai numeri complessi che ne derivano, sono *non meno reali, non meno empiricamente tangibili,* di quelle di semplice scorrimento lungo un unico e medesimo asse, rappresentate dai numeri « reali ». Vi ha però questa differenza: che mentre queste ultime, grazie alle convenzioni stabilite, costituiscono la rappresentazione simbolica geometrica di dati avvenimenti quantitativi o di mutazione di senso, relativi a grandezze fisiche suscettibili di opposizione, le prime non sono invece capaci di costituire una tale rappresentazione simbolica. Ma questo, dunque, unicamente perchè il fatto stesso di aver fissato convenzionalmente un dato sistema di rappresentazione simbolica geometrica, implica il toglimento d'una tale proprietà rappresentativa a qualsiasi altro sistema, anche se questo, con convenzioni diverse, sarebbe di per sè stato eventualmente suscettibile di costituire esso pure un altro modo di rappresentazione simbolica.

Ne segue che, mentre le espressioni algebriche a numeri « reali », in quanto rappresentazione simbolica diretta o di primo grado di dati scorrimenti di segmenti tutti lungo un unico e medesimo asse, sono poi rappresentazione simbolica indiretta o di secondo grado di dati avvenimenti relativi a grandezze fisiche suscettibili di opposizione, quelle invece a numeri « immaginarî » e complessi, sebbene, in quanto rappresentazione simbolica diretta di date operazioni geometrico-cinematiche di scorrimento e di rotazioni di segmenti, abbiano un significato non meno reale delle precedenti, tuttavia non possono nel tempo stesso essere rappresentazione simbolica indiretta di avvenimenti di grandezze fisiche. Ed è in questo, solo in questo, che consiste, ci si permetta l'espressione, la loro « immaginarietà ».

Tuttavia esse possono servire lo stesso a scoprire nuovi rapporti fra queste grandezze fisiche. In quanto che, una volta che queste siano rappresentate da dati segmenti d'un asse, quale si sia il modo con cui si venga poi a scoprire nuovi rapporti fra questi segmenti, questi rapporti così scoperti fra i segmenti rappresenteranno altrettanti rapporti corrispondenti fra le grandezze fisiche che da questi segmenti erano rappresentate.

E che vi sia, del resto, la possibilità di pervenire ai rap-

porti medesimi, una volta così scoperti, anche per via di operazioni simboliche aventi invece tutte un significato fisico, ne fa fede la possibilità stessa di concepire i numeri complessi, anche senza far ricorso ad alcuna rappresentazione geometrica sul piano, quali semplici combinazioni di numeri reali.

Questa teoria analitica dei numeri complessi è fondata, come è noto, sulla definizione del numero complesso quale una coppia ordinata di numeri reali, e, conseguentemente, tutte le operazioni di calcolo che via via vengono definite fra tali numeri complessi — e le cui regole collimano con quelle che valgono pei numeri complessi a significato geometrico-cinematico — vengono ad essere costituite ciascuna, effettivamente, da più operazioni algebriche comuni su numeri reali, *rappresentate cumulativamente nel simbolo di tale operazione unica fra numeri complessi.*[1]

Di guisa che ogni trasformazione analitica a mezzo di numeri complessi, conducente alla scoperta di dati rapporti fra i segmenti dell'asse dei numeri reali, viene, in grazia a ciò, ad essere sempre risolvibile in una serie, sia pure molto più lunga e ben più complicata, di operazioni algebriche esclusivamente su numeri reali, le quali verranno così nel loro complesso a rappresentare appunto quella via tutta a significato reale, desiderata dal fisico, atta a condurre ai rapporti medesimi, già scoperti per la via più breve.[2]

Bastano, ci sembra, questi pochi cenni a mettere in evidenza le difficoltà psicologiche speciali ed ulteriori che il simbolismo di simbolismo, introdotto già coi numeri positivi e negativi, dà luogo allorchè si complica ancora maggiormente coll'introduzione dei cosiddetti numeri immaginarî.

La difficoltà, infatti, di tenere sempre presente dinanzi alla mente la distinzione fra il processo del ragionamento effettivo, a base di operazioni od esperienze fisiche tangibili semplicemente immaginate, e quello della sua simbolizzazione tanto più si accresce quanto più indiretti e complicati divengono i rapporti che legano il primo processo al secondo; e dà

[1] Cfr., p. es., D. Gigli, op. cit.: *Dei numeri complessi a due e a più unità*, pag. 508 e seg., 531 e seg.; e: Ch. Meray, *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, Première Partie: *Principes généraux*, Gauthier-Willars, Paris, 1894, chap. III, pag. 37-58.

[2] Cfr. P. Duhem, op. cit.: *La théorie physique* etc., pag. 27 e seg.; e P. Boutroux, « *La théorie physique* » *de M. Duhem et les mathématiques*, « Rev. de Métaph. et de Morale », Mai 1907, pag. 364 e seg.

luogo conseguentemente a grande confusione di idee allorquando il processo simbolico di secondo grado, pur restando rappresentazione simbolica di altra categoria di operazioni empiricamente tangibili ed empiricamente esatte, cessa tuttavia, in determinati momenti del suo svolgimento, di costituire più alcuna rappresentazione di quel mondo fisico originario che le operazioni simboliche sì di primo che di secondo grado erano destinate a rappresentare.

Inoltre, certe generalizzazioni od estensioni di concetti che tuttavia, appunto perchè tali, comprendono il concetto antico come caso particolare, alterano però sì notevolmente quest'ultimo, che finiscono col rappresentare, in sostanza, una cosa del tutto diversa; e se il simbolo relativo al concetto antico, alla cui forma esteriore quest'ultimo aveva finito coll'associarsi indissolubilmente, si fa invece servire, senza alcuna modificazione della forma esteriore stessa, a significare anche il concetto nuovo, — come è successo, p. es., per il simbolo del radicale quadrato di quantità negative, — difficile è che questa immutabilità del simbolo non costituisca per molti un impedimento grave all'assimilazione completa del concetto nuovo.

In terzo luogo, i numeri immaginarî sono stati inventati — e vengono introdotti per lo più anche oggidì nell'insegnamento — *dopo* avere urtato contro l'ostacolo di espressioni, da insegnamenti precedenti già implicitamente denunziate prive di senso, e quasi diremmo come una *scappatoia* onde sfuggire all'ostacolo stesso. Da ciò quel certo senso di *diffidenza* verso questi numeri immaginarî, che pone la mente in uno stato sfavorevole alla loro comprensione e accettazione chiara e netta, e che invece non si avrebbe avuto e non si avrebbe se essi fossero stati inventati, o venissero oggi almeno introdotti nell'insegnamento, *insieme ai numeri positivi e negativi,* partendosi da bel principio dal « piano dei numeri », per procedere subito alla rappresentazione analitica di tutte quante le operazioni di scorrimento e di rotazione di segmenti suscettibili di venire eseguite rispettivamente su dati assi del piano e su tal piano.

Infine, la geometria analitica è venuta dal canto suo ad accrescere queste difficoltà psicologiche di comprensione chiara e di accettazione netta incontrate dai numeri immaginarî. Infatti, in quanto sistema di traduzione permettente di ricondurre le questioni della geometria alla soluzione di equazioni

algebriche, e quindi in quanto sistema di « parallelismo » o di continua corrispondenza di espressioni algebriche con luoghi geometrici, essa ha fatto sì che anche di espressioni algebriche immaginarie si tendesse a cercare il luogo geometrico corrispondente. Da ciò le espressioni metaforiche paradossali, come quella, p. es., di « punti immaginarî » di intersezione di due circoli del piano che non si incontrano, e simili, le quali, per l'abito mentale di associazione psichica fra simbolo fonetico ed oggetto rispettivo, hanno fatto cadere molti in un vero e proprio stato di « misticismo », cioè di credenza nell'esistenza di qualche cosa che non si sa che cosa sia e che ci appare avvolta di mistero, perchè non suscettibile nè di cadere sotto alcuno dei nostri sensi nè di venire immaginata a mezzo di elementi sensibili comunque fra loro combinati.[1]

Nella geometria analitica le grandezze fisiche suscettibili di opposizione, per la cui rappresentazione si è convenuto di adottare i segmenti presi sopra un unico e medesimo asse, sono appunto le coordinate; quindi ad espressioni algebriche « immaginarie » non corrisponde nessuna coordinata effettiva, quindi neppure alcun punto che quest'ultima dovrebbe concorrere a determinare. Perciò, sotto questo rispetto, l'uso di espressioni metaforiche, atte a suscitare la credenza opposta, sarebbe senz'altro condannabile.

Senonchè l'utilità di simili espressioni, che ha indotto i matematici ad introdurle e a conservarle, consiste, come è noto, nell'analogia di certe costruzioni geometriche che esse pongono in rilievo ed in altri vantaggi che esse assicurano di economia mentale e di fissazione d'una concettualità più larga, l'importanza dei quali non può certo essere mai valutata abbastanza.

Così, p. es., dati due archi circolari qualunque non incontrantisi fra loro appartenenti a due circoli del piano, una data costruzione ci fa trovare una certa retta. Se, completando i due archi, i due circoli che ne risultano s'incontrano, si trova che la retta passa per i loro due punti d'intersezione; se invece non s'incontrano, la retta non incontra più nè l'uno nè l'altro circolo, ma, la costruzione restando la stessa, così, per mettere in rilievo questa analogia di costruzione, continuiamo a pire che la retta passa pei due punti d'intersezione dei due cir-

[1] Cfr. Hastings Berkeley, *Mysticism in Modern Mathematics*, Henry Frowde Univ. Press, Oxford, 1910, pag. 70-72, 131, ecc.

coli, solo aggiungendo che tali punti d'intersezione sono ora immaginarî.[1]

La proprietà di questa retta, o « asse radicale », di essere la corda comune ai due circoli è, dunque, per esprimerci colle parole del Chasles, una sua proprietà *contingente* o *accidentale;* mentre altre proprietà di quest'asse radicale — p. es. quella che consiste nel fatto che le tangenti ai due circoli, condotte da uno qualunque dei suoi punti, sono uguali fra loro, di modo che ciascun punto dell'asse è il centro d'un circolo che taglia ortogonalmente i due circoli dati — sono *permanenti,* cioè sussistono sia che i due circoli s'incontrino sia che non s'incontrino.[2]

Ora, le soluzioni immaginarie delle equazioni destinate a fornirci le coordinate dei due eventuali punti d'intersezione dei due circoli stanno a indicare che effettivamente questi ultimi non si incontrano e che quindi la proprietà *contingente* dell'asse radicale di esserne la corda comune non si verifica; esse, tuttavia, ne rappresentano, non meno delle soluzioni reali, sebbene in via indiretta, le proprietà *permanenti.* Infatti, se collo stesso sistema con cui si costruisce l'equazione algebrica della retta passante per due punti reali di cui ci siano note le coordinate, si costruisce ora l'analoga equazione algebrica servendosi invece di tali espressioni immaginarie, e mediante opportune trasformazioni si eliminano poi dalla equazione medesima le quantità immaginarie, l'equazione reale così ottenuta ci dà senz'altro l'equazione dell'asse radicale. Mentre lo stabilimento di tale equazione sarebbe invece assai più lungo e assai più difficile se lo si dovesse dedurre col tradurre analiticamente le proprietà permanenti dell'asse radicale stesso.

Inoltre, non solo sono appunto le proprietà contingenti che sono state scoperte *prima* delle permanenti e che ci sono perciò più famigliari, ma queste proprietà permanenti sono state alla loro volta scoperte *dapprima unicamente in quelle figure che presentavano anche le proprietà contingenti.* La scoperta di tali proprietà permanenti *anche* in altre figure che non presentavano più quelle contingenti non è avvenuta che

[1] A. Cayley, *Presidential Adress to the British Association in Sept. 1883,* in: A. Cayley, *The collected mathematical Papers,* Univ. Press, Cambridge, 1896, vol. XI, n. 784, pag. 438.

[2] M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie,* 3ème éd. conforme à la 1ère, Gauthiers-Villars, Paris, 1889, pag. 205-206, et la sua Nota XXVI: *Sur les imaginaires en géométrie,* ibid., pag. 368-370.

posteriormente. Essa ha così prodotto un allargamento di concetto, in quanto che, rispetto a queste proprietà permamenti, si è riscontrato essere fra loro equivalenti figure diverse che non erano apparse invece equivalenti rispetto alle proprietà contingenti. E i « punti immaginarî », le cui espressioni algebriche rappresentano, per via indiretta, come abbiamo ora visto, queste proprietà permanenti, e che ci appaiono come un'estensione del concetto di punto, servono così benissimo a fissare questo nuovo più largo concetto di figure equivalenti rispetto alle proprietà permanenti stesse.

Quindi: rilievo dato all'analogia di certe costruzioni geometriche, maggiore facilità nella trascrizione analitica di certe figure, fissazione di concetti nuovi più larghi, sono questi i vantaggi che militano in favore di tali modi metaforici paradossali d'espressione. Di fronte ai quali vantaggi sta però pur sempre il grave inconveniente sopra rammentato del pericolo che la mente non sopporti la tensione necessaria ad abbracciare l'indiretta e complicata realtà che si nasconde dietro a ciascuna di queste espressioni e ceda piuttosto alla sua inclinazione naturale e semplicista di attribuire a queste ultime il significato immediato d'un oggetto reale che esse stiano a rappresentare, cadendo in tal modo nel più fantastico e più nebuloso misticismo.

Da quanto abbiamo ora detto ci sembra risultino chiare le ragioni psicologiche per cui, pur rimanendo il ragionamento matematico anche nella sua fase della simbolizzazione indiretta effettivamente immutato nella sua natura fondamentale, esso abbia dovuto tuttavia dare luogo, di fronte alla fase precedente a simbolismo diretto, e precisamente per questo fatto di ricorrere a un simbolismo di simbolismo, a difficoltà speciali, le quali ci hanno servito, del resto, a penetrare ancora più a fondo nell'analisi del processo mentale costituito dal ragionamento matematico. Difficoltà d'altro genere, ma sotto certi rispetti non meno notevoli, vedremo il ragionamento matematico avere incontrato ed incontrare nelle sue fasi della condensazione e della inversione simbolica, di cui ci occuperemo nel prossimo nostro studio.

PARTE SECONDA:

Il ragionamento matematico nelle sue fasi di condensazione ed inversione simbolica.

Dopo avere, nella prima parte di questo nostro studio sulle forme superiori del ragionamento pubblicata nel numero precedente, passato in rassegna le due prime fasi dell'evoluzione delle matematiche che abbiamo denominato del simbolismo diretto e indiretto, ci proponiamo, in questa seconda parte, di fare un rapidissimo cenno delle altre due fasi che abbiamo ritenuto necessario ancora di esaminare; dopo di che, in una terza ed ultima parte, un rapido riassunto di quanto avremo così detto intorno al ragionamento matematico e alla funzione che in esso ha avuto il simbolismo ci permetterà, a titolo di conclusione, alcuni raffronti fra le matematiche e la logica matematica.

Il ragionamento matematico nella sua fase di condensazione simbolica.

È nel calcolo infinitesimale che prende origine e si sviluppa, prima che si generalizzi l'uso anche in tutti gli altri campi delle matematiche, quella fase particolare del simbolismo di queste ultime, che, in mancanza d'un termine più adatto, potremo chiamare di « condensazione », nel senso che a una data espressione algoritmica non corrisponde più una singola operazione, sia pure nella sua generalità comprendente un numero infinito di operazioni consimili particolari, bensì molte

operazioni fra loro diverse, contemporanee o susseguentisi, tutte rappresentate « condensatamente » in tale simbolo unico.

È quindi in questo campo che conviene studiare, *sempre dal solo nostro punto di vista prettamente psicologico,* questa fase nuova dell'evoluzione simbolica, per esaminare le conseguenze e le ripercussioni che essa ha avuto sul processo mentale del ragionamento relativo; al quale scopo anche pochi cenni soltanto saranno, speriamo, più che sufficienti.

Osserviamo, anzitutto, che l'operazione matematica di « passaggio al limite » non altera in nulla la natura fondamentale del ragionamento quale serie di operazioni od esperienze semplicemente pensate.

È a tutti noto, infatti, come si introduce in matematica la nozione di limite, p. es. quella di un limite finito: *Preso a piacere* un numero *arbitrariamente* piccolo, se, coll'avvicinarsi indefinito della variabile ad una data quantità, la differenza fra un'altra data quantità e la funzione che si considera della variabile *finisce per divenire e restare poi costantemente* inferiore in valore assoluto al numero scelto piccolo a piacere, si dirà che questa seconda quantità alla quale la funzione continuamente si avvicina è il limite dei valori di quest'ultima.

Orbene, quel numero « preso a piacere » e « arbitrariamente » piccolo implica la ripetizione di molte e molte esperienze di calcolo, nelle quali, preso dapprima un dato numero piccolo, se ne prende poi un altro più piccolo, poi un terzo ancora più piccolo, e così via, verificando ogni volta che per ciascuno di tali valori esiste un valore della variabile sufficientemente vicino alla quantità alla quale essa si avvicina indefinitamente, tale che risultino soddisfatte le condizioni suddette, necessarie e sufficienti per poter dire che la funzione della variabile tende a quel dato limite. Esperienze di calcolo, che un principiante sarà costretto ad eseguire effettivamente, prima di pervenire a convincersi di tale tendenza al limite, e che gli insegnanti più valorosi del calcolo infinitesimale, come si rammenta chi scrive, eseguiscono effettivamente, onde rendere ben tangibile ai propri uditori questo tendere di una quantità a un limite.

Che si possa poi acquistare quel senso di certezza del tendere di una quantità verso un dato limite, pur limitandoci ad eseguire, effettivamente o solo mentalmente, un piccolo numero soltanto di esperienze di calcolo, questo è un feno-

meno psicologico del tutto simile a quello dell'acquisto del medesimo senso di certezza dell'assoluta generalità d'una data dimostrazione geometrica, eseguita p. es. sopra un triangolo particolare, pur ripetendo mentalmente la dimostrazione stessa sopra un piccolissimo numero di altri triangoli, diversi di forma da quello disegnato sul foglio.

E che si possa, infine, una volta così riconosciuto il tendere d'una data quantità verso un dato limite, immaginare quest'ultimo come già raggiunto dalla quantità medesima e assumerlo senz'altro in luogo di essa, questo riposa sul fatto psicologico generale, proprio di ogni e qualsiasi ragionamento, che *il vedere coll'immaginazione la possibilità di eseguire date operazioni od esperienze porta senz'altro ad immaginarle come già eseguite.* E questo perchè, in sostanza, l'una cosa è identica all'altra. Così il riconoscere che feci, nell'esempio più volte rammentato negli studî precedenti, della possibilità di allineare, uno dopo l'altro, secondo il numero crescente dei loro capelli, tutti gli abitanti di Londra, mi fece immaginare, *nell'istante medesimo,* di avere già eseguito tutti questi numerosissimi atti di allineamento. Il quale mio atto mentale non fu altro, psicologicamente parlando, che un vero e proprio passaggio al limite.

Ora, come è noto, la concezione fondamentale del calcolo differenziale consiste appunto nel servirsi di opportuni passaggi al limite di rapporti fra quantità piccole, supposte tendenti ad impiccolire sempre più, allo scopo di pervenire ad ottenere relazioni quantitative più semplici di quelle sussistenti fra le quantità finite dalle quali ci si parte; il che permette, viceversa, scoperte così che siano queste dipendenze fra certe relazioni quantitative più semplici ed altre più complesse, di risalire in molti casi, con un procedimento inverso costituito dal calcolo integrale, da relazioni quantitative più semplici, eventualmente scoperte o più facilmente scopribili fra dati fenomeni, a relazioni più complesse fra questi stessi fenomeni o fra altri fenomeni a questi ultimi in qualche modo quantitativamente connessi.

Le relazioni quantitative che si ottengono con questi passaggi al limite, — o relazioni « differenziali », — sono, per lo più, più semplici di quelle fra le quantità finite, perchè esse vengono a riguardare elementi quantitativi i cui effetti poi si accumulano e si sviluppano, rendendole così più complesse, nelle quantità finite medesime.

Così un grave, p. es., partentesi con velocità zero e soggetto alla accelerazione costante g, accumula e sviluppa nella sua velocità $v = gt$ gli effetti di tale accelerazione costante g, e poi accumula e sviluppa alla loro volta gli effetti di tale velocità v nello spazio $s = \frac{1}{2} gt^2$, percorso nel tempo t. È dunque perchè si permette al fenomeno della caduta di accumulare e sviluppare le sue successive caratteristiche, ciascuna effetto immediato della precedente, che le espressioni quantitative corrispondenti vanno facendosi via via più complicate.

Ed è per questo che, viceversa, quanto minore è il numero delle caratteristiche successive che si permette a un dato fenomeno di accumulare e di sviluppare durante il suo decorso, tanto più elementari sono le caratteristiche stesse e tanto più semplici, conseguentemente, le relazioni quantitative che le rappresentano.

Ora, il trascurare nei passaggi al limite delle relazioni differenziali le quantità cosiddette « infinitesime », cioè tendenti a zero, che si trovano nel secondo membro dell'uguaglianza, rispetto alla quantità finita che viene così a rappresentare il limite cercato, — e, più in genere, il trascurare gli infinitesimi d'un grado qualunque rispetto a tutti quelli d'un grado inferiore, — equivale a scartare dalla nostra considerazione, fino dal loro primo nascere, le caratteristiche fenomeniche più complesse, che conseguirebbero dall'accumularsi e svilupparsi degli effetti delle caratteristiche più elementari rappresentate dalle quantità finite o dagli infinitesimi di grado inferiore; equivale, in altre parole, ad arrestare il rispettivo processo di sviluppo a quel dato punto in cui esso avrebbe appunto cominciato a produrre quelle caratteristiche più complesse, rappresentate quantitativamente dagli infinitesimi trascurati.

Data questa natura del calcolo differenziale, cioè di non consistere che in opportuni passaggi al limite di rapporti fra quantità piccole, supposte tendenti ad impiccolire sempre più, occorre che il ragionatore veda sempre ben chiaro che queste quantità piccole sulle quali egli immagina di operare, se pur tendono a divenire sempre più piccole, sono tuttavia, nel momento di ogni e qualsiasi operazione eseguita mentalmente su di esse, pur sempre quantità *finite*, le sole — come già faceva

osservare giustamente George Berkeley — che la mente umana possa concepire come materia di operazioni di calcolo.[1]

Ed è, appunto, per non avere visto ben chiaro questa natura *finita* degli infinitesimi, prima del rispettivo passaggio al limite, che essi hanno incontrato, come è noto, al primo nascere del calcolo infinitesimale, tante e sì vivaci opposizioni e poi tante difficoltà ad ottenere il diritto di cittadinanza pieno ed intero: « Durante le prime fasi di sviluppo del calcolo infinitesimale del Leibniz si presentò la difficoltà di farsi una rappresentazione logicamente soddisfacente delle grandezze infinitamente piccole. Gli uni le interpretavano come quantità addirittura nulle, altri se le figuravano misticamente come grandezze, le quali, sebbene più piccole di qualsiasi altra immaginabile, contenevano tuttavia il germe atto a produrre la quantità finita ».[2]

Durante certe fasi della loro manipolazione essi apparivano come quantità finite, in certe altre come quantità addirittura nulle: « S'incontrano grandi difficoltà nel tentare di determinare che cosa sono gli infinitesimi: in un dato momento sono trattati come numeri finiti, in un altro come zeri ».[3]

Tutto questo dipendeva dalle difficoltà di concepire gli infinitesimi ora come quantità finite e ora come quantità tendenti a un limite; cioè a dire, ora come quantità *statiche* e ora come quantità *dinamiche*.

L'eccellenza e l'« economia » del simbolismo di Leibniz, che riusciva ad esprimere l'uno e l'altro significato a mezzo d'uno stesso ed unico simbolo, costituirono tuttavia dapprima, precisamente per questo, una causa ulteriore di accrescimento di tali difficoltà. Cogli algoritmi Leibniziani dy e dx, infatti, il rapporto $\frac{dy}{dx}$ costituisce già di per sè il simbolo d'un passaggio al limite, senza che ci sia bisogno di indicare questo passaggio al limite con un simbolo apposito in più, come faceva Newton. Nel tempo stesso, finchè dy e dx sono separate, l'idea di passaggio al limite rimane completamente sospesa; dy e dx non sono allora che semplici simboli di quantità algebriche ordinarie, *statiche*, cioè, piccole sì, ma finite e ferme

[1] George Berkeley, *A Treatise concerning the Principles of Human Knowledge* (1710), § 132, in: *Works of George Berkeley*, Fraser's Edition, Oxford, Clarendon Press, 1901, vol. I, pag. 332.

[2] A. Voss, *Ueber das Wesen der Mathematik*, 2 Aufl., Teubner, Leipzig, 1913, pag. 47.

[3] Ph. E. B. Jourdain, *The Nature of Mathematics*, Jack, London, 1910, p. 70.

nel loro valore, sulle quali è permesso di eseguire tutte le operazioni algebriche solite. Appena, invece, anche una sola dy e una sola dx si presentano sotto forma di rapporto, esse, insieme a tutte le altre dy e dx anche non in rapporto che si trovino nella medesima espressione od uguaglianza algebrica, si trasformano senz'altro da quantità *statiche* in quantità *dinamiche,* delle quali e dei cui rapporti si tratta di trovare il limite.

Così, p. es., dall'espressione $y = ax^2$, sostituendo $x + dx$ a x e $y + dy$ a y, si deduce, a mezzo di semplici trasformazioni algebriche ordinarie eseguite su dy e su dx come quantità finite, l'altra espressione: $\frac{dy}{dx} = 2ax + a \times (dx)$. Ma, arrivati a questo punto, gli algoritmi dy e dx, *benchè immutati nel loro aspetto esterno,* cambiano di significato, in quanto stanno ormai a rappresentare delle quantità che tendono ad avvicinarsi indefinitamente a zero, e danno allora come limite del loro rapporto la quantità $2ax$.

L'espressione, dunque, $\frac{dy}{dx} = 2ax$ è non meno rigorosa dell'altra $\frac{dy}{dx} = 2ax + a \times (dx)$, *perchè gli algoritmi dy e dx hanno nell'una un significato diverso che nell'altra;* mentre cesserebbe di essere tale se in essa questi algoritmi continuassero a rappresentare le quantità statiche di prima.

È questo duplice e così diverso significato che in tal modo si viene ad attribuire, in momenti diversi, ad uno stesso ed unico simbolo, ciò che ha costituito la maggiore difficoltà alla giusta comprensione del metodo Leibniziano; difficoltà, che consisteva, non solo nel vedere chiaramente questo duplice significato del simbolo, ma nel vedere l'uno o l'altro significato *a seconda del momento opportuno,* e non mai contemporaneamente; altrimenti un tal duplice significato sarebbe stato effettivamente inconcepibile, come impossibile sarebbe di concepire un corpo ad un tempo fermo e moventesi.

Ed è stato il rilievo esclusivo o preponderante dato al carattere *statico* ciò che precisamente ha fatto nascere da principio tanti dubbî sulla rigorosa esattezza del procedimento seguito. Coloro, infatti, che mantenevano agli algoritmi dy e dx, anche quando si trovavano sotto forma di rapporto, il carattere *statico,* da essi effettivamente posseduto mentre sottoposti alle operazioni algebriche ordinarie, — e a costoro dava

buon giuoco il Leibniz stesso quando diceva che egli trascurava gli infinitesimi di fronte alle quantità finite «come i grani di sabbia rispetto al mare», — non volevano attribuire al metodo di Leibniz, in confronto a quello di Newton il quale distingueva con algoritmi diversi la fase statica da quella dinamica, che il valore d'un calcolo approssimativo, o, al massimo, quello di un calcolo «di errori compensati».[1]

Gli indivisibili del Cavalieri, invece, anzichè mettere in maggiore evidenza l'aspetto statico degli infinitesimi a scapito di quello dinamico, saltavano a piè pari il primo per non considerare che il termine già raggiunto dagli infinitesimi stessi considerati nel loro aspetto dinamico; con ciò rendevano inconcepibili le operazioni algebriche ordinarie da eseguirsi sugli infinitesimi stessi, le quali hanno un significato solo quando questi ultimi vengono considerati nel loro aspetto statico, finito, *anteriore al loro moversi verso il limite.*

Tutte queste difficoltà così incontrate al suo nascere dal calcolo infinitesimale e quelle proprie ad ogni singolo passaggio al limite per sè stesso, implicante la «visione» del risultato cui indefinitamente ci si avvicina con una data serie di operazioni od esperienze di calcolo algebrico semplicemente pensate, ci spiegano le difficoltà psicologiche speciali che si oppongono, anche oggi, a rendere accessibile a molti questa fase ulteriore del ragionamento matematico. Il ragionatore è costretto, infatti, a non perdere mai di vista il duplice e talora molteplice significato che in tempi diversi ha tale o tal simbolo, *sebbene sempre il medesimo nel suo aspetto esterno;* il che esige, a seconda del momento opportuno, ora di mantenere in sospeso e ora di procedere a date operazioni, oppure di procedere ora a tali e tali operazioni e ora invece a tali altre, *senza che da parte del simbolo, che resta nel frattempo immutato, venga mai alcuna indicazione in proposito;* nel tempo stesso il ragionatore deve potere abbracciare d'un solo sguardo, in tal momento opportuno, tutta la complicazione e molteplicità grandissime di intere serie o catene di operazioni, quali quelle appunto necessarie ad effettuare un passaggio al limite, *tutte espresse sempre da questo solo ed unico ed impassibile simbolo.* Molteplicità e varietà di significati in tempi diversi e molteplicità di operazioni in dati momenti, il tutto espresso conglo-

[1] Cfr. lo stesso A. Comte, *Cours de Philosophie Positive* (1830), 5ème éd., Tome I, Société Positiviste, Paris, 1892, pag. 200-220; e: A. Voss, op. cit., pag. 30-31.

balmente da un solo ed unico segno grafico, ciò che costituisce appunto quella « condensazione simbolica », richiedente da parte del ragionatore una continua e forte tensione intellettuale onde tenere presenti dinanzi alla mente, discriminare, ora eseguire e ora tenere in sospeso, e poi seguire per lungo tratto, *senza nessun appoggio di altrettanti distinti simboli di evocazione e di fissazione,* tutta una infinità di operazioni od esperienze da eseguirsi mentalmente, ciascuna delle quali è magari di per sè semplicissima, ma il cui insieme è quanto di più complesso si possa immaginare.

E questo vale tanto più quanto più si procede innanzi nel calcolo infinitesimale, p. es. quando si passa dalle derivate di una funzione a una sola variabile alle derivate parziali di una funzione a più variabili, dal calcolo delle derivate al calcolo delle variazioni, dal calcolo differenziale al calcolo integrale, dagli integrali definiti a quelli indefiniti, e così via: La « condensazione simbolica », cioè la quantità e la varietà di cose espresse da ciascuno dei relativi simboli, va di pari passo e continuamente crescendo; basta pensare, p. es., quante e quali diverse operazioni contemporanee e successive stanno a rappresentare i simboli, pur certo non fra i più « condensati », d'una derivata parziale di second'ordine o d'un integrale indefinito! Con ciò quel sostegno e quel riposo che la mente trovava nell'algebra pel fatto che ciascuna delle operazioni d'un qualsiasi dato processo di calcolo era sempre rappresentata dal suo apposito speciale simbolo viene invece a fare sempre più difetto per via di tale crescente condensazione simbolica; e va crescendo conseguentemente la tensione mentale necessaria onde supplire a tale mancanza di punti d'appoggio e di riposo intermediarî.

Le difficoltà, dunque, alla comprensione e all'uso delle matematiche da parte di tanti, che già abbiamo visto cominciare a manifestarsi nella fase del simbolismo diretto e presentarsi già notevoli in quella del simbolismo indiretto, si accrescono così ancora maggiormente in questa ora esaminata della condensazione simbolica, pel fatto che essa contribuisce, anche dal canto suo, a rendere sempre meno immediato il contatto fra simbolo rappresentatore e realtà rappresentata, complicando sempre maggiormente il rapporto di tale loro corrispondenza; e questo, dunque, perchè essa viene a concentrare e a condensare in ciascun simbolo una realtà sempre più ampia e sempre più complessa.

Difficoltà d'altro genere, meritevoli esse pure di richiamare la nostra attenzione, si presentano, infine, nella quarta fase evolutiva che ci siamo proposti di esaminare, quella della inversione simbolica, alla quale ora qui accenneremo con brevità se possibile ancora maggiore che per le fasi precedenti.

Il ragionamento matematico nella sua fase di inversione simbolica.

Abbiamo già visto, nella prima parte di questo nostro studio sulle forme superiori del ragionamento pubblicata nel numero precedente di questa rivista, che la geometria analitica, in quanto sistema di traduzione permettente di ricondurre le questioni della geometria alla soluzione di equazioni algebriche, è venuta a costituire un sistema di « parallelismo » o di corrispondenza fra espressioni analitiche e luoghi geometrici. Ogni luogo geometrico, corrispondente ad una data espressione analitica spesso anche molto complessa, costituendo così di quest'ultima *una significazione concreta,* quasi diremmo *un'oggettivazione sintetica,* veniva così a rappresentare pel ragionatore, sperso nella farragine di mille altre espressioni algebriche consimili, come un raggio di luce e una base di riposo, dalla quale poi poter riprendere con maggior lena e più sicura orientazione la serie delle trasformazioni algebriche successive.[1]

Ma non sempre, evidentemente, questa corrispondenza fra espressioni algebriche e luoghi o fenomeni geometrici può sussistere. Le prime, infatti, in quanto relazioni puramente quantitative, sono d'ordine più generale che non quelle geometriche. Ben si comprende, quindi, come vi possano essere infiniti sistemi di proprietà quantitative, pei quali, sia per il numero degli elementi sia per il genere delle relazioni fra di essi, manchi ogni e qualsiasi corrispondenza geometrica. Per es., tutte le equazioni algebriche a più di tre variabili non possono più trovare, come quelle a due o a tre variabili, alcuna corrispondenza nella geometria analitica, nella quale a determinare ogni punto occorrono due o tre coordinate soltanto.

Riprendendo la terminologia del Chasles, di cui già avemmo da occuparci nel nostro su citato studio precedente a proposito dei « punti immaginarî », possiamo dire che la proprietà

[1] Cfr., p. es., A. COMTE, op. cit.: *Cours de Philos. Pos.*, Tome I, pag. 357-358, e, per le consimili significazioni concrete offerte dalla meccanica, pag. 502, 581-584.

delle espressioni analitiche di rappresentare date relazioni puramente quantitative è la loro proprietà *permanente,* mentre quella di rappresentare qualche luogo geometrico è una loro proprietà *contingente,* cioè che in molti casi può venire a mancare.

Ora, mediante l'*inversione simbolica* il matematico ha saputo appunto conservare i più importanti vantaggi del sistema di « parallelismo » o di corrispondenza reciproca fra geometria ed algebra, anche quando questa proprietà contingente delle espressioni algebriche più non sussisteva. Tale *inversione simbolica* consiste in questo che il luogo od oggetto o fenomeno geometrico, che veniva rappresentato simbolicamente da una data espressione algebrica, diviene simbolo, alla sua volta, di altre espressioni algebriche, *analiticamente analoghe,* ma non più suscettibili di rappresentare alcun fatto geometrico. In altre parole, l'oggetto che presenta determinate proprietà indirette d'ordine quantitativo fornite dalla sua rappresentazione analitica più le corrispondenti proprietà dirette d'ordine geometrico si assume a simbolo di qualunque altro sistema analitico che goda solo delle prime e non più delle seconde. [1]

È così, p. es., che si possono ottenere delle « geometrie » a quattro e più « dimensioni », introducendo nei sistemi di quattro e più variabili delle restrizioni e delle definizioni analoghe a quelle che valgono per la geometria a tre dimensioni, ma esse non cessano di essere perciò, evidentemente, nonostante tale loro veste geometrica, che altrettanti « capitoli di pura algebra ». (Salvo che alla considerazione dei « luoghi geometrici », quali insiemi di semplici punti, si sostituisca quella di « luoghi geometrici » costituiti da insiemi di figure geometriche di un dato tipo, come curve o superfici di un dato ordine, nel qual caso equazioni anche a più di tre variabili possono divenire esse pure suscettibili di rappresentazioni geometriche concrete, sebbene molto complicate). [2]

Il ricorso a tale inversione simbolica presenta il grande vantaggio di permettere trattazioni quantitative d'ordine più generale, *pur servendo loro lo stesso da guida preziosissima,* quasi quanto lo è il parallelismo geometrico effettivo nei casi in cui esso sussiste. E queste trattazioni quantitative d'ordine

[1] Cfr. W. Wundt, *Logik,* Dritte Aufl., I. Bd., Enke, Stuttgart, 1906, pag. 484.
[2] J. Tannery, *Science et philosophie,* Alcan, Paris, 1912, chap. II: *Le rôle du nombre dans les sciences,* pag. 22.

più generale, così grandemente facilitate, contenendo come casi particolari quelle ad effettivo parallelismo geometrico, conducono in tal modo a scoprire, anche di queste ultime, proprietà nuove o proprietà vecchie per via spesso più breve.

Di fronte a tale vantaggio sta però di contro, come è facile immaginare, il pericolo di « misticismo » cui si va incontro se, perdendo di vista nel seguito della trattazione il significato e gli scopi di tale inversione simbolica, si finisce coll'attribuire un'esistenza effettiva al simbolo geometrico d'una data espressione algebrica, per la quale invece alcuna corrispondenza geometrica più non sussista. Pericolo di misticismo, che, come è noto, si è presentato specialmente a proposito della trattazione analitica delle geometrie non-euclidee.

È nota l'origine delle geometrie non-euclidee: dai tentativi non riusciti del Saccheri e di tanti altri di giungere a dimostrare per via d'assurdo il postulato delle parallele di Euclide si è pervenuti con Gauss, Lobatschewski e Bolyai alla costruzione d'una geometria planimetrica nuova, la quale partendosi dalla negazione d'un tale postulato giungeva a risultati naturalmente del tutto diversi.[1]

Fino a qui, nessuna modificazione nella natura del ragionamento in quanto serie di esperienze geometriche semplicemente pensate e nessuna modificazione nella concezione fondamentale del nostro spazio erano implicite in queste costruzioni. Il fatto di non dar luogo a nessuna contraddizione logica (cioè di non condurre alla constatazione mentale di nessun fatto geometrico incompatibile con altri già ammessi o già constatati essi pure mentalmente), che ebbe ai suoi tempi un'importanza filosofica grandissima perchè fece risaltare la natura prettamente empirica del postulato euclideo, e, di rimando, di tutti i postulati e assiomi in genere, ci appare oggi ben naturale, visto che la indimostrabilità di tale postulato stava appunto a significare non essere esso conseguenza necessaria dei postulati precedenti; come ben naturale, per la stessa ragione, ci parrebbe che a nessuna contraddizione logica conducesse, p. es., una meccanica celeste partentesi da un'ipotesi diversa da quella di Newton. Con questa differenza però: che della non corri-

[1] Cfr., p. es., R. Bonola, *Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non-euclidee*, in: *Questioni riguardanti le matematiche elementari* raccolte e coordinate da F. Enriques, vol. I, Zanichelli, Bologna, 1912, pag. 248-268; e: G. Fano, *La geometria non-euclidea*, in « Scientia », 1908, n. VIII-4, pag. 257-265.

spondenza di un'ipotesi non-Newtoniana coi fatti della realtà non ci si può accorgere che *dai risultati* che da tale ipotesi derivino; mentre che, per l'ipotesi di Lobatschewski, appena appena non la si assuma molto approssimata a quella di Euclide, non c'è bisogno, per accorgersi che non è conforme al vero, di aspettare a verificare che il risultato cui essa conduce relativo alla somma degli angoli d'un triangolo non collima coi risultati ottenuti dalla misurazione diretta di tali angoli, bensì basta la diretta constatazione oculare o oculare-tattile dell'ipotesi stessa.

Che poi l'ipotesi di Lobatschewski non sia suscettibile, se moltissimo approssimata a quella di Euclide, neppure di rigetto empirico, neanche questo deve sorprenderci perchè a qualunque ipotesi verificata dai fatti (e nessuna lo è con un grado di approssimazione tanto grande quanto la euclidea) se ne può sempre sostituire infinite altre diverse, tanto approssimate ad essa da soddisfare ugualmente alla medesima verificazione empirica, la quale non può essere che più o meno approssimata. [1]

Colla dimostrazione del Beltrami, che la geometria planimetrica del Lobatschewski non è altro, in sostanza, che la geometria euclidea della pseudosfera, purchè per « rette del piano » s'intendano le geodetiche di tale superficie, la cosa cambia completamente aspetto: Dall'essere la geometria di Lobatschewski una geometria del piano, escludente di per sè quella di Euclide, e non in contraddizione coi dati dell'esperienza solo se moltissimo approssimata a quest'ultima, essa diviene una semplice branca della geometria euclidea relativa ad una data superficie e i cui teoremi cessano allora completamente di sembrarci strani. Il concetto di « piano », cioè di una superficie a curvatura costante e nulla, viene così esteso in modo da includervi anche le superfici parimente a curvatura costante ma diversa da zero e negativa, quale è quella della pseudosfera. Il che poi conduce ad includervi, col Riemann, anche quelle a curvatura costante e positiva, cioè le superfici sferiche; le quali, sempre ponendo mente che per « rette del piano » si devono ora intendere le geodetiche della superficie, vengono così a costituire l'interpretazione concreta d'una seconda « planimetria » non-euclidea, nella quale non esistono affatto rette parallele (ossia due rette contenute nel piano s'incontrano

[1] Cfr., p. es., F. Enriques, *Problemi della scienza*, Zanichelli, Bologna, 1906, pag. 290 e seg.; e: A. Voss, op. cit.: *Ueber das Wesen d. Math.*, pag. 92-94.

sempre) e nella quale lo stesso postulato dell'*unicità della retta* soffre delle eccezioni, nel senso che due rette aventi due punti a comune possono, per date posizioni speciali dei due punti, non coincidere e racchiudere invece un dato spazio fra loro (come succede appunto pei circoli massimi passanti pei due estremi di un diametro della sfera). « Planimetrie » di Euclide, di Lobatschewski e di Riemann che non implicano, dunque, ripetiamo, tre diversi « sistemi » di geometria, bensì soltanto tre branche diverse della geometria ordinaria.[1]

Si può dunque dire che col Lobatschewski abbiano avuto inizio quei metodi logici di *isolazione*, consistenti nel separare dall'insieme dei restanti e rigettare ora l'uno e ora l'altro degli assiomi e postulati fra loro indipendenti della geometria ordinaria, dando così luogo ad altrettanti sistemi geometrici astratti, diversi da quello ordinario. Mentre col Beltrami, non diremo s'iniziano, ma hanno nuovo e fecondo impulso quelli di *sostituzione*, nei quali, interpretando o traducendo dati termini geometrici con altrettanti corrispondenti oggetti, diversi da quelli comunemente intesi, ma pei quali restano validi formalmente i ragionamenti fatti per questi ultimi, si passa senz'altro dalla geometria di date figure a quella di altre. Metodi logici di isolazione e di sostituzione, che, come è noto, hanno tanto arricchito in questi ultimi tempi la scienza matematica.[2]

Tutto questo può essere ottenuto senza alcuna trattazione propriamente analitica della questione; bensì solo per via di operazioni od esperienze geometriche, ben nettamente immaginate, sia che ad esse, supposte eseguite sul piano, vengano attribuiti risultati assunti deliberatamente per ipotesi diversi da quelli forniti dall'osservazione diretta, sia che venga in seguito constatato questi risultati così assunti essere proprio empiricamente esatti purchè interpretati come riferentisi ad altre determinate superfici diverse dal piano. E il risultato finale è dunque quello di porci di fronte a tre specie di superficie, tutte a curvatura costante, — rispettivamente nulla, positiva e negativa, — presentanti alcune proprietà fondamentali ben diverse fra loro (postulato delle parallele valevole per il piano ma non per la pseudosfera nè per la sfera; postulato

[1] Cfr. HASTINGS BERKELEY, *Mysticism in modern mathematics*, Frowde, London, 1910, pag. 208-209.

[2] Cfr., p. es., W. WUNDT, op. cit.: *Logik*, I, 494; e: R. BONOLA, Saggio cit.: *Sulla teoria delle parallele, ecc.*, pag. 274-280.

della unicità della retta valevole per il piano e per la pseudosfera ma, in taluni casi, non per la sfera), e altre proprietà non meno fondamentali a comune, consistenti nella « planarità elementare » e nella « congruenza » (cioè a dire, nel potersi considerare qualunque loro porzione infinitesima come piana e nella libera trasportabilità su di esse di qualsiasi figura al massimo con sole flessioni, senza estensioni).[1]

Volendo tradurre analiticamente queste proprietà fondamentali comuni basterà considerare tre superfici qualunque appartenenti rispettivamente alle tre ora dette specie e assumere su ciascuna di esse un medesimo qualsiasi sistema di due coordinate; allora l'espressione analitica della prima proprietà che tutte e tre hanno a comune consisterà nell'uguagliare il quadrato della distanza fra un punto qualunque della superficie e un altro qualsiasi ad esso infinitamente vicino ad una certa espressione differenziale omogenea di secondo grado delle coordinate del primo punto, mentre quella della seconda proprietà, parimente comune, ci verrà data dal porre come costante, cioè come indipendente dalle coordinate variabili del punto considerato, una certa espressione algebrica, che poi si riscontra corrispondere appunto alla misura della curvatura della rispettiva superficie.

È chiaro pertanto che l'insieme di queste due relazioni analitiche non basta, per la sua stessa troppo grande generalità, a definire nè l'una nè l'altra di queste tre superficie in particolare; e che affinchè un tale sistema analitico sia suscettibile d'una interpretazione geometrica sopra una di esse, p. es. sul piano, occorre sia verificata qualche altra condizione analitica in più, quella precisamente che esprime essere la curvatura, oltre che costante, anche nulla.

Se ora per analogia analitica da questa trattazione a due sole variabili desideriamo passare a quella a tre variabili si capisce che la possibilità d'una simile trattazione analitica non implica minimamente che i tre corrispondenti sistemi di relazioni analitiche che così si otterranno siano suscettibili tanto l'uno che gli altri di interpretazione geometrica.

[1] Cfr., p. es., W. K. Clifford, *The Philosophy of the pure Sciences*, Lecture III: *The Postulates of the Science of Space*, in: *Lectures and Essays*, vol. I, Macmillan, London, 1901, pag. 369-381; e: H. von Helmholtz, *Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome*, in: *Vorträge und Reden*, Fünfte Aufl., Zw. Bd., Vieweg, Braunschweig, 1903, pag. 10-11, 14-15.

Ora, come è noto, il Riemann ha fatto ancora di più: partendosi dal concetto generalissimo di « molteplicità » continue (stetige Mannigfaltigkeiten) *n* volte « estese », si limita poi a quelle per le quali stabilisce delle relazioni analitiche corrispondenti a queste della planarità elementare e della congruenza che valgono per le suddette superfici; e ne deduce quindi, anche per le molteplicità continue a tre dimensioni, la possibilità di una « curvatura » costante diversa da zero.[1]

Ma, evidentemente, la nozione generale di molteplicità *n* volte o anche solo tre volte estesa che egli assoggetta all'analisi matematica non è che una concezione puramente algebrica, che non implica nient'altro all'infuori di semplici nozioni quantitative, molto più generali di quelle che gli avrebbero potuto fornire le relazioni spaziali propriamente dette.

Le denominazioni di « punto », « luogo », « dimensione », « linea » e « lunghezza di linea », « planarità elementare » (Ebenheit in den kleinsten Teilen), « curvatura », e simili, relative ad una molteplicità *n* volte estesa, non stanno a indicare che pure espressioni analitiche; e se esse rappresentano un'inversione simbolica felicissima, che gli ha servito mirabilmente di orientazione e di guida nella sua trattazione di puro e semplice calcolo (volta ad analizzare e sceverare alcuni postulati della geometria), non debbono però illuderci: la questione se tutti e tre i casi analitici a tre variabili che così risultano possibili, corrispondenti a quelli a due variabili che trovano un'interpretazione geometrica nelle tre suddette superfici a curvatura costante, o se nessuno dei tre, o se soltanto alcuni dei tre, sono suscettibili d'una interpretazione geometrica resta, anche dopo queste denominazioni convenzionali, tuttora aperta; e nessuna considerazione analitica, bensì soltanto il confronto di queste espressioni colla rappresentazione che in base alla nostra esperienza geometrica quotidiana ci facciamo dello spazio, può risolverla. E questo confronto, come è noto, ci dice che uno solo di questi tre casi analitici, quello a « curvatura » zero, è suscettibile di tale interpretazione geometrica.[2]

Il ricorso ai famosi animaletti bidimensionali del Clifford

[1] B. Riemann, *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, in: *Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke*, Zw. Aufl., Teubner, Leipzig, 1892, Abhandlung XIII, pag. 272-287.

[2] Cfr. W. Wundt, op. cit.: *Logik*, I, Dritter Abschnitt, Drittes Kapitel, 2. b.: *Der mathematische Raumbegriffe*, pag. 480-494, in ispecie pag. 481, 483, 486.

e dell'Helmholtz, che pur vivendo su superfici o su porzioni limitate di superfici a curvatura costante non potrebbero mai arrivare a sospettare l'esistenza nè a farsi un'idea di tale curvatura del loro spazio, sebbene essa effettivamente sussista, non ha fatto che oscurare la questione.[1]

Si trattava, infatti, di sapere se date espressioni analitiche, cui erano state date convenzionalmente, per inversione simbolica, delle denominazioni geometriche, erano o no suscettibili di alcuna interpretazione geometrica effettiva. Ora, il ricorso a questi animaletti bidimensionali non risponde a tale domanda; nè tanto meno vi risponde affermativamente, chè anzi l'Helmholtz stesso, « per evitare malintesi », si affretta a rilevare « che questa cosiddetta misura della curvatura dello spazio è una grandezza algebrica trovata per via analitica, e che la sua introduzione non si basa affatto sulla presupposizione di circostanze che avrebbero un significato solo per l'intuizione sensibile ».[2]

Il ricorso a questi animaletti ha invece lo scopo di predisporci, anche per via di considerazioni puramente geometriche, ad ammettere come *non impossibile* l'eventuale esistenza di « un qualche cosa » di geometrico, che nessun fatto geometrico, certo, ci autorizza minimamente a sospettare nè di cui possiamo farci, è vero, neppure alcuna lontanissima idea, ma la di cui possibilità verrebbe invece a risultarci per via di pure considerazioni analitiche; e questo ad esaltazione della potenza del calcolo stesso, il quale si addimostrerebbe così capace persino di risultati « trascendentali », di vere e proprie « extrapolazioni empiriche ».

Ora tutta questa « trascendentalità » non consiste, come abbiamo visto, che nella pura e semplice denominazione convenzionale con termini geometrici di espressioni puramente analitiche; d'altra parte, alla esistenza o alla possibilità di esistenza di consimili « noumeni », — sia che si tratti di tale curvatura dello spazio o degli spazî a quattro e più dimensioni, — di cui nessun fenomeno o nessuna combinazione di fenomeni può darci la benchè minima idea, può certo credere chi vuole, ogni atto di misticismo consistendo appunto nell'am-

[1] Cfr. W. K. CLIFFORD, *The Common Sense of the Exact Sciences*, Kegan Paul, Trench, Trübner & Co., London, 1907, cap. IV, § 19: *On the Bending of Space*, pag. 214-226; e: H. von HELMHOLTZ, Saggio cit.: *Ueber den Urspr. u. die Bedeut. d. geom. Axiome*, pag. 8 e seg.

[2] HELMHOLTZ, *ibid.*, pag. 18.

mettere l'esistenza di un qualche cosa di misterioso non suscettibile nè di cadere sotto alcuno dei nostri sensi nè di venire immaginato a mezzo di elementi sensibili comunque fra loro combinati. Ma è un'illusione di credere, come fa il Clifford, che tali ipotesi extraempiriche o trascendentali potrebbero mai costituire alcun principio di spiegazione per nessun fenomeno, geometrico o fisico che sia, visto che ogni e qualsiasi « spiegazione » d'un fenomeno non consiste che nella sua classificazione in qualche categoria di fenomeni già noti e a noi più famigliari o nella sua produzione, a mezzo di una serie di operazioni od esperienze semplicemente pensate, da altri fenomeni, effettivamente constatati o ipotetici, ma pur sempre « sensibili ».

Quanto all'interpretazione proiettiva che poi col nuovo indirizzo del Cayley e del Klein è stato possibile di dare anche a questi « spazî » non-euclidei, essa rappresenta evidentemente tutt'altra cosa e fa parte di quei metodi di sostituzione sopra accennati che tanto fecondi si sono dimostrati nel campo del ragionamento geometrico.

Possiamo perciò concludere col dire che l'applicazione della inversione simbolica alle questioni non-euclidee ne ha dimostrato ad un tempo tutta la grande fecondità e tutta la pericolosità.

Passate così in rassegna, nella prima parte pubblicata nel numero precedente e nell'attuale seconda parte, le quattro fasi dell'evoluzione del ragionamento matematico, — del simbolismo diretto e indiretto e della condensazione e inversione simbolica —, le quali pel nostro scopo ci sono sembrate le più importanti, ci resta ora da riassumere il nostro pensiero e trarre le nostre conclusioni sulle matematiche in genere; mentre la valutazione dell'importanza in esse avuta dal simbolismo ci spingerà, come già abbiamo detto, ad alcuni raffronti fra matematiche e logica matematica, la quale ad un analogo sistema di rappresentazione simbolica ha tentato essa pure di ricorrere. Ed è quello che faremo in una terza ed ultima parte di questo nostro studio sulle forme superiori del ragionamento.

PARTE TERZA:

Matematiche e logica matematica.

Il breve spazio che ci siamo imposti per questo nostro studio sulle forme superiori del ragionamento, rappresentate dal ragionamento matematico, ci ha costretti a limitarci solo alle quattro fasi speciali di quest'ultimo passate in rassegna nella prima e nella seconda parte, rispettivamente pubblicate nei due numeri precedenti. E se abbiamo scelto precisamente queste quattro fasi a preferenza di altre si è perchè dal nostro punto di vista ci sono sembrate le più importanti fra tutte. La prima di esse, infatti, quella del simbolismo diretto, ci è parsa la più adatta a mettere in evidenza come il passaggio dal primitivo conteggio materiale al calcolo aritmetico e poi a quello algebrico non abbia mutato in nulla la natura delle operazioni od esperienze del primitivo conteggio materiale stesso, le quali nel calcolo aritmetico vengono semplicemente pensate, e in quello algebrico pensate riunite a gruppi, anzichè essere eseguite effettivamente. Mentre l'esame, sia pur rapidissimo, che abbiamo fatto delle tre altre, ci è parso necessario onde mostrare che questa stessa natura del ragionamento matematico, in quanto appunto combinazione mentale di tali o consimili operazioni od esperienze materialmente tangibili, permane anche in quei casi in cui, forse più che in altri, essa sembra, invece, essere contraddetta da certi risultati a prima vista non aventi più nulla di « reale », o dileguarsi dietro ad una condensazione simbolica molto pronunciata che non mette più in evidenza una per una le singole operazioni da eseguirsi,

o dar luogo al paradosso di condurre apparentemente ad extrapolazioni empiriche che tale natura stessa rende di per sè del tutto inammissibili.

Possiamo perciò passare ora a riassumere le nostre conclusioni che i due studi precedenti ci autorizzano a trarre sulle matematiche in genere e sulla funzione in esse avuta dal simbolismo. Dopo di che passeremo al raffronto e alla valutazione comparativa fra le matematiche stesse e l'altra nuova grande branca del ragionamento superiore, costituita appunto dalla logica matematica.

Le matematiche: riassunto e conclusione.

La prima questione che si presenta a proposito delle matematiche è quella di spiegare, dato che la natura del ragionamento in quanto serie di operazioni od esperienze semplicemente pensate resta, come abbiamo visto, immutata in ogni e qualsiasi processo di calcolo, come mai s'incontrino allora nel ragionamento matematico difficoltà speciali e molto maggiori che non in quello comune. Ora, da quanto abbiamo visto, questo dipende, precisamente, dagli stessi perfezionamenti che hanno reso il primo uno strumento logico sì poderoso.

Primo fra questi perfezionamenti, che contribuiscono a rendere difficile ai più il ragionamento matematico, è *la grande astrazione dei concetti*. Essa, infatti, fa sì che bisogna immaginare di eseguire tutte le operazioni od esperienze su materiale che è di tal grado di generalità che sembra quasi vuotarsi di ogni contenuto intuibile. Essa, quindi, rende difficile a molti di « vedere », al momento necessario, dietro ad ogni operazione d'ordine così generale, tutte le infinite o solo quelle operazioni particolari che hanno o possono avere per il ragionatore in quel momento una speciale importanza; e toglie così ai più, per la impedita visione del significato reale delle operazioni stesse, ogni interesse al processo del ragionamento, il quale interesse è invece ciò che unicamente mantiene il « filo logico » di quest'ultimo.

Ma la grande astrazione dei concetti non basta da sola a spiegare la refrattarietà di tanti alle matematiche; tanto è vero che fra i più refrattari ad esse si contano spesso anche filosofi sommi, capaci delle astrazioni concettuali maggiori.

Vi ha quindi certo grandissima parte anche l'*enorme sviluppo del simbolismo,* tutto proprio delle matematiche. Il simbolismo, infatti, usurpa ormai quasi completamente, nel ragionamento matematico, il posto del linguaggio ordinario, sì che la mente non può riposarsi che ben raramente su fatti o risultati espressi in termini ad essa più famigliari. Colle fasi poi del simbolismo indiretto, della condensazione simbolica, della inversione simbolica, come abbiamo già visto, e con altre in misura ancora maggiore, il simbolo rappresentatore si allontana sempre più dalla realtà rappresentata e il rapporto di tale loro corrispondenza si fa sempre più complicato e sempre meno facilmente afferrabile, sì che si richiede, ogni volta che se ne presenti il bisogno, una grande tensione mentale, di cui pochi sono capaci, per vedere dietro ad un dato simbolo tutto ciò e solo ciò che esso sta a rappresentare.

Infine, *la prolungatezza e complicatezza del ragionamento,* rese possibili dalla potenza deduttiva stessa del calcolo matematico, producono, la prima, una grande stanchezza che rende spesso impossibile di seguire fino in fondo lo svolgimento del processo, e, la seconda, come un senso di disorientamento in mezzo a quella farragine di formule che esprimono l'intrecciarsi fra loro in un medesimo momento di altrettante numerosissime operazioni od esperienze quantitative, eseguite così solo mentalmente. A diminuire in molti casi queste difficoltà provenienti dalla prolungatezza e complicatezza del calcolo contribuiscono efficacemente la geometria analitica, come abbiamo già visto, e anche la meccanica e la fisica matematica in genere, colle *significazioni concrete* od *oggettivazioni sintetiche* che esse permettono di date espressioni e di dati sviluppi analitici; e al medesimo scopo vedemmo mirare, con buoni risultati, malgrado i suoi pericoli, l'inversione simbolica; ma non per questo esse non permangono pur sempre per lo più in altissimo grado. Qui ci basti rammentare come il Poincaré, nel domandarsi come mai, visto che il ragionamento matematico riposa sugli stessi principî di quello comune, pure avvenga che vi siano tante persone ad esso refrattarie, attribuisca il fatto alla mancanza in molti di quel « senso matematico-estetico dell'ordine », che permette appunto di afferrare in un sol colpo l'andamento generale di dati processi anche lunghissimi e complicatissimi di calcolo e di collocare conseguentemente con tutta facilità al loro dovuto posto, in tal quadro così in-

travveduto dell’intero processo, i vari elementi algebrici che debbono concorrere a produrlo.[1]

Queste difficoltà psicologiche speciali del ragionamento matematico non ne mutano però affatto, lo ripetiamo ancora, la natura essenziale, che resta quella stessa di tutto quanto il ragionamento in genere. Ed è appunto in grazia di questa sua natura sostanzialmente immutata che anche il ragionamento matematico conserva, del ragionamento in genere, tutte le proprietà e caratteristiche fondamentali.

Così, p. es., sebbene pura e semplice deduzione di una serie si può dire infinita di risultati da poche o pochissime premesse, pure esso è ben lungi dall’essere una vuota tautologia, perchè, come tutto il ragionamento in genere, costituisce *una storia pensata* di operazioni od esperienze quantitative, fra loro combinate e concatenate nei più svariati modi, la quale produce *dei fatti, delle situazioni nuove,* i risultati delle quali noi « constatiamo » appunto nelle conclusioni del nostro ragionamento.

Le situazioni quantitative nuove, cui dà luogo ogni e qualsiasi operazione od esperienza di calcolo, *non sono affatto implicite nelle premesse da cui il calcolo stesso si parte,* come — per rammentare l’esempio già citato in uno dei nostri studî precedenti — nè nella premessa dell’allungamento delle sbarre metalliche sotto l’azione del calore nè nell’altra della maggior lentezza d’oscillazione d’un pendolo più lungo in confronto ad uno più corto *non era affatto implicita l’operazione od esperienza di trasportare un dato orologio a pendolo da una stanza più fredda ad una più calda.* Questo trasporto ha dato luogo *ad una successione storica nuova di eventi, creata liberamente dalla mia fantasia,* al termine della quale ho potuto « constatare » mentalmente che l’orologio ora oscillante più lento nella stanza più calda *era tuttavia quello medesimo che oscillava più rapidamente nella stanza più fredda.* Constatazione, questa, ripetiamo, *d’un fatto nuovo,* il quale non era affatto implicito completamente nelle sole premesse, perchè a produrlo occorreva *l’operazione materiale d’un trasporto,* eseguita solo mentalmente, alla quale le premesse stesse non alludevano affatto.

[1] H. Poincaré, *L’invention mathématique*, nella « Revue du Mois », 10 juillet 1908, pag. 9-12, 18-19; e anche in: *Science et méthode*, Flammarion, Paris, 1908, Livre I, chap. III, pag. 44 e seg.; lo stesso, *L’avenir des mathématiques*, in « Scientia », 1908, VIII-3, pag. 5.

Del tutto analogamente, le premesse da cui il calcolo matematico si parte non contengono affatto implicitamente le operazioni di calcolo, *che la nostra fantasia resta invece del tutto libera di immaginare a suo piacere;* e queste « successioni storiche » così liberamente immaginate di operazioni od esperienze quantitative, combinate fra loro nei più svariati modi, conducono, anche in tal caso, *a fatti quantitativi nuovi, a produrre i quali occorre prima creare appunto colla fantasia una tale successione di eventi.* Si dirà forse, — scrive a tale proposito il Milhaud, — che il matematico non fa « che trarre dai dati iniziali tutto ciò che essi contenevano implicitamente? Non sarebbe che un semplice modo di dire. Chi non sente tutta l'attività, tutta l'ingegnosità, tutta la potenza di creazione necessaria per cavare fuori dalle idee primitive tutto ciò che vi era nascosto, o, più esattamente, *per effettuare sopra di esse, prese come basi, le più ricche costruzioni?* » — « Chi non sente che la matematica realizza il suo più gran successo, non già tanto pel suo sottomettersi docile alla realtà che ci sta dinanzi, quanto per la spontaneità degli slanci del nostro spirito, per la ricchezza e la potenza della sua attività creatrice? ».[1]

Da ciò tutta la spontaneità e la irregolarità della evoluzione della matematica, proprie di ogni e qualsiasi processo combinatorio dovuto all'immaginazione.[2]

Non c'è quindi affatto bisogno di ricorrere, come fa il Poincaré, — onde comprendere come mai il ragionamento matematico non sia tutto una tautologia, — al cosiddetto « principio di induzione completa » o « ragionamento per ricorrenza »; il quale non è, in sostanza, che un processo di generalizzazione di dimostrazione come qualunque altro (simile, p. es., a quello che conduce in geometria a generalizzare per tutti gli infiniti triangoli la dimostrazione fatta sopra un triangolo particolare), e basato, come qualunque altro processo di generalizzazione, sopra un ordinario passaggio al limite, nel senso che si suppone eseguito un numero quanto si vuole grande di date operazioni.[3]

[1] G. Milhaud, *La pensée mathématique: son rôle dans l'histoire des idées*, in: *Nouvelles études sur l'histoire de la pensée scientifique*, Alcan, Paris, 1911, pag. 22-23, 24-25.

[2] Cfr. L. Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Alcan, Paris, 1912, pag. IX.

[3] Cfr. H. Poincaré, *Sur la nature du raisonnement mathématique*, in: *La Science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris (senza data), 1ère Partie, chap. I, p. 9-28.

Parimente, tale capacità di eseguire coll'immaginazione successioni e combinazioni infinite di operazioni od esperienze quantitative nuove, di cui già si conoscono in precedenza i risultati, la quale è posseduta dal calcolo matematico in grado tanto superiore rispetto a tutte le altre forme di ragionamento, non gli deriva già da alcuna sua diversità sostanziale rispetto a queste ultime, bensì dalla proprietà, che abbiamo già visto essere comune a tutto il ragionamento in genere, cioè dell'accrescersi della capacità di deduzione coll'accrescersi del grado di astrazione.

È perchè il concetto di « unità » da cui si parte e su cui si fonda in definitiva tutto quanto il calcolo matematico rappresenta l'oggetto il più schematizzato possibile — in quanto ogni e qualsiasi attributo particolare gli è tolto salvo quello della « pluralità », — in altre parole, è perchè la matematica è la scienza dell'astrazione massima, che essa ha potuto spingere al massimo il numero e la varietà e la complicatezza delle combinazioni di operazioni od esperienze, immaginate di venire eseguite su tale oggetto « unità » così schematizzato.

In ciò aiutata anche dal continuo ulteriore processo di generalizzazione relativo alle diverse operazioni quantitative e alle loro combinazioni o maniere di combinazione, le quali, a mano a mano che determinati loro gruppi si addimostravano equivalenti rispetto a dati risultati, formali o sostanziali, davano luogo alla formazione di altrettanti corrispondenti nuovi concetti più larghi, che accrescevano così sempre più anche dal canto loro la possibilità e la capacità di deduzione di combinazioni quantitative ulteriori. [1]

Da ciò, anche nella evoluzione delle matematiche, — come, del resto, in quella di tutte quante le scienze che si basano in gran parte sul ragionamento, — l'oscillare continuo fra le due opposte forme di attività del pensiero, fra la tendenza sintetica da una parte e quella analitica dall'altra; cioè a dire, ora verso la scoperta e la formazione di concetti nuovi ed ora nel senso di trarre e sviluppare da quelli ormai così acquisiti il maggior numero possibile di deduzioni. [2]

Ed è, infine, per tale suo stesso concetto estremamente astratto di « unità », suscettibile di rappresentare indifferen-

[1] Cfr. G. Milhaud, saggio cit.: *La pensée math., etc.*, pag. 24.

[2] Cfr., p. es., L. Brunschvicg, op. cit.: *Les étapes de la philos. math.*, pag. 537.

temente tutte le unità di misura speciali, che il calcolo è potuto venire a costituire, per tutte le scienze fisiche, — a cominciare dalla geometria, grazie alla rappresentazione a mezzo di coordinate, — un grandioso sistema di « traduzione » in una stessa ed unica lingua di tutti indistintamente i rapporti quantitativi intercedenti fra i loro fenomeni. [1]

Sì che si può definire la matematica essere quella scienza in cui le esperienze semplicemente pensate, in essa costituenti il ragionamento, sono di natura quantitativa (o, possiamo aggiungere, ordinativa) generalissima, tale da poter rendere equivalenti, rispetto ai risultati di esse, i più svariati fenomeni fisici. [2]

Quanto al simbolismo, — fatta eccezione di alcuni casi specialissimi, quale, p. es., la parte indiretta che come abbiamo visto esso ha avuto nella formazione del concetto più generale di numero esteso anche alle espressioni immaginarie e complesse, — nessuna parte veramente *attiva* si può dire esso abbia in genere mai preso nello sviluppo delle matematiche. Chè esso si è limitato, per lo più, alla modesta funzione di docile e passivo strumento del pensiero, esplicantesi, ora nel costituire un ben ordinato « casellario » per tutti i nuovi concetti che venivano via via formandosi, e ora nel rappresentare e riassumere sempre più concisamente le lunghe e complicate serie di operazioni analitiche che da questi nuovi e sempre più larghi concetti perveniva in copia sempre maggiore a trarre la laboriosa e perseverante deduzione. [3]

Ma non per questo tale sua funzione di semplice « registratore del pensiero » è stata meno utile. È stato, anzi, certamente, proprio in grazia del suo così meraviglioso simbolismo che alla matematica è stato possibile di accrescere indefinitamente il numero e la varietà e la complicatezza delle combinazioni quantitative sempre nuove, semplicemente pensate. Le quali la fantasia del matematico non avrebbe mai potuto immaginare e creare se il simbolismo non avesse tenuto sempre aperto davanti ad essa un inventario completo dei materiali — fatti originari o risultati via via acquisiti — su cui eserci-

[1] Cfr., p. es., A. Voss, *Ueber das Wesen der Mathematik*, Zw. Aufl., Teubner, Leipzig, 1913, pag. 13.

[2] Cfr. le diverse definizioni della matematica riportate in A. Woss, *ibid.*, pag. 26-29.

[3] Cfr. A. Comte, *Cours de philosophie positive* (1830), 5e édition, Société Positiviste, Paris, 1892, vol. I, pag. 120-121.

tarsi ulteriormente, e se non avesse nel tempo stesso fornito ad essa, ad ogni passo, una rappresentazione concreta e concisa del cammino che la fantasia stessa stava percorrendo.

E la fantasia ha potuto giovarsi di tale simbolismo perchè, *grazie alla omogeneità di tutte le operazioni od esperienze che quest'ultimo stava a rappresentare,* essa poteva sempre vedere dietro ad esso il chiaro contenuto di operazioni od esperienze quantitative, quasi diremmo, facilmente concretizzabili.

Certo, nella grande farragine delle combinazioni quantitative escogitabili, la fantasia anche del matematico più provetto ha avuto spesso bisogno di qualche significazione ancora più concreta, che « oggettivasse » sinteticamente tali o tali altri risultati analitici e la orientasse sia nel cammino già percorso sia in quello ancora da percorrere. Da ciò, come abbiamo visto, il grande aiuto che il sistema di « parallelismo », istituito dalla geometria analitica, fra espressioni analitiche e luoghi geometrici, è stato per lo stesso puro calcolo, e l'utilità di ricorrere, persino, malgrado i suoi pericoli, alla inversione simbolica, onde giovarsi di tale preziosa guida anche quando questo parallelismo più non sussisteva. Da ciò, anche, l'aiuto che allo sviluppo del calcolo ha dato parimente la meccanica e la fisica matematica in genere, la quale, come la geometria analitica, ha concorso pure dal canto suo a fornire nuovi e più svariati punti di partenza e sicure basi di appoggio e di sosta e preziose indicazioni di orientamento al fervido lavoro della fantasia combinatrice.[1]

Ma la prima e più sostanziale ragione del grande aiuto che a questa fantasia combinatrice di sempre nuovi rapporti quantitativi ha potuto dare il simbolismo matematico resta pur sempre il fatto della *omogeneità* delle operazioni od esperienze, tutte d'ordine quantitativo, che esso stava a rappresentare, il che permetteva, ripetiamo, alla fantasia stessa, anche in mancanza d'una significazione più concreta e sintetizzatrice, di farsi pur sempre un'idea abbastanza concreta dei fatti che il simbolismo le metteva dinanzi e sui quali essa doveva operare.

Ci occorre ora pertanto di esaminare se altrettanto possa dirsi del simbolismo usato nella cosiddetta logica matematica

[1] Cfr., p. es., V. VOLTERRA, *Sur quelques progrès récents de la physique mathématique*, in: *Clark University Lectures*, Clark University Press, Worcester (Mass.), 1912, pag. 2.

e quindi se da esso possiamo parimente attenderci la medesima meravigliosa fertilità che abbiamo riscontrato il simbolismo corrispondente avere avuto nelle matematiche propriamente dette. Questo ci darà occasione di fare alcune considerazioni brevissime d'ordine generale anche su quest'ultima nuova branca della logica, colle quali porremo termine a questo nostro studio sulle forme superiori del ragionamento.

La logica matematica.

Un ragionamento qualsiasi, in quanto serie concatenata di esperienze semplicemente pensate, implica di per sè stesso, per ciascuna di queste ultime, un processo corrispondente d'induzione, magari più o meno inavvertito, mediante il quale il risultato conseguito da una data o da date esperienze fra loro simili, effettivamente eseguite nel passato, si generalizza in modo da attribuirlo anche alla esperienza attuale, simile essa pure alle precedenti, ora semplicemente pensata. Compiuta così che sia, per opera della fantasia combinatrice, quella data concatenazione di esperienze semplicemente pensate mediante la quale si perseguono le varie vicende dell'oggetto che in quel momento desta il nostro interesse, l'attenzione del ragionatore, prima tutta rivolta all'atto creativo, può allora riandare il cammino rapidamente percorso durante quest'ultimo e soffermarsi ad ogni passo a controllare e verificare, in base ai propri ricordi più accuratamente evocati, se ogni risultato attribuito a ciascuna esperienza sia proprio giusto, cioè se ciascuna delle induzioni su cui il ragionamento si basa sia veramente legittima. Si ha così *un diverso modo di distribuzione dell'attenzione* che porta ad « esplicitare » ciascuna di queste induzioni, cioè a porla in particolare rilievo sotto forma di appartenenza d'un dato oggetto ad una data classe o di inclusione di una data classe di oggetti in un'altra classe: il tale e tale oggetto oppure tutti gli oggetti di tale e tale classe, stati sottoposti che siano al tale e tale esperimento, presentano tali e tali attributi, cioè vengono a far parte di tale e tale altra classe.

Ne consegue che il ragionamento, da essere un vero e proprio « Gedankenexperiment », assume allora la forma di determinate *operazioni classificatorie* (comprendenti inclusioni, riunioni, intersezioni, ecc., di classi), *eseguite sopra un materiale*

già prodotto e presentato dinanzi alla mente dall'atto creatore precedente dovuto alla fantasia combinatrice. Per es., il nostro esperimento semplicemente immaginato, di cui abbiamo fatto più volte cenno, del pendolo metallico trasportato da una stanza fredda ad una calda, assume allora la forma sillogistica: il pendolo così trasportato appartiene alla classe delle sbarre metalliche riscaldate; la classe delle sbarre metalliche riscaldate è inclusa in quella delle sbarre allungate; la classe delle sbarre allungate è inclusa in quella delle sbarre oscillanti più lentamente; dunque ecc.

Questa forma di deduzione a base di operazioni su classi, nella quale può venire così a risolversi ogni e qualsiasi ragionamento, non è altro, dunque, che una specie di « catalogamento » dei risultati di determinate esperienze, *dopo che queste, mercè la fantasia combinatrice, sono state mentalmente compiute.* È come una *dissezione anatomica* d'un organo dopo che la rispettiva funzione ne ha determinato e creato la complicata struttura. In altre parole, è un modo *statico* di considerare i prodotti d'un processo *dinamico.*

La possibilità di trasformare così ogni ragionamento, in grazia appunto dell'induzione che ne sta a base, in corrispondenti operazioni di inclusioni, riunioni, intersezioni, ecc., di classi fa sì che queste ultime rappresentino esperienze d'ordine il più generale che si possa immaginare, valevoli per tutti i ragionamenti in genere. Nel tempo stesso, in grazia di tale loro somma generalità e della conseguente esperienza famigliare di tutti i momenti, esse sono tali, — quale quella, p. es., del contenente-contenuto nella quale abbiamo ora trasformato il nostro ragionamento sul pendolo, — che di ciascuna si conosce già in precedenza il rispettivo risultato, di guisa che possono venire semplicemente pensate.

Queste operazioni, semplicemente pensate, di inclusioni, riunioni, intersezioni, ecc., di classi, danno perciò luogo a risultati parimente d'ordine generalissimo, rispetto ai quali tutti quanti i ragionamenti, considerati che siano nel loro modo *statico,* sono fra loro equivalenti. Esse riassumono pertanto « i principî fondamentali del ragionamento » e costituiscono così la « logica pura », cioè a dire un modo di ragionare che vale universalmente per tutti i casi possibili, i quali ne divengono altrettante applicazioni. Il linguaggio colle sue proposizioni e i suoi processi sillogistici, da una parte, e la logica

matematica o logistica con i suoi appositi simboli e le sue trasformazioni algoritmiche, dall'altra, intesi tanto l'uno che l'altra a dare l'espressione o traduzione adeguata di queste operazioni su classi ne costituiscono la corrispondente « logica formale », cioè la forma che riveste, in simboli verbali o algoritmici, la logica pura.

Alle regole riscontrate empiricamente sussistere nei procedimenti della logica pura, le quali non fanno che rendere conto delle ora dette operazioni su classi e dei rispettivi risultati, fanno riscontro date « leggi » o « assiomi » che regolano i corrispondenti procedimenti di quella formale.

Questi assiomi o leggi della logica formale, queste cosiddette « leggi del pensiero », non sono dunque altro, essi pure, che l'espressione di « proprietà effettive degli insiemi di cose »; « essi esprimono semplicemente le proprietà di tutte le classificazioni possibili »; non sono, cioè, non meno dei geometrici, che semplici constatazioni empiriche, solo d'ordine più generale ancora. Ed essi hanno carattere normativo appunto perchè rappresentano « la quintessenza della nostra esperienza in senso lato ».[1]

Di guisa che, non già la geometria, non già l'aritmetica, bensì la logica stessa più pura e più formale, anche in quanto « insieme, come dice il Couturat, di implicazioni formali indipendenti da ogni contenuto », anche in quanto « scienza, come dice il Russell, in cui non si sa mai di che cosa si parli nè se quello di cui si parla sia vero », è dessa effettivamente la prima delle scienze sperimentali. E il ragionamento anche in essa — prima, naturalmente, che per il simbolismo usato e per la lunga abitudine nell'adoperarlo abbia potuto trasformarsi in processo meccanico — non cessa un solo istante di essere un seguito di *atti d'intuizione,* in quanto rappresenta sempre un seguito di operazioni, sia pure d'ordine generalissimo, ma pur sempre « tangibili », quale quella ora accennata del contenente-contenuto o altre consimili di inclusioni, riunioni, intersezioni, ecc., di classi, che la mente immagina di eseguire sopra dati gruppi od insiemi di cose.

Ne consegue che la pretesa di potere eliminare dalla « lo-

[1] Cfr., p. es., F. Enriques, *Problemi della scienza,* Zanichelli, Bologna, 1906, pag. 218-220; H. Poincaré, *Les derniers efforts des logisticiens,* in op. cit.: *Science et méth.*, pag. 212; C. Mineo, *Logica e matematica,* « Riv. di Filosofia », Genn.-Marzo 1911, pag. 50.

gica pura », in grazia del simbolismo introdotto, ogni traccia d'intuizione (« l'intuizione, scrive il Couturat, non deve avere alcuna parte nei ragionamenti rigorosi; questi, per essere tali, devono essere puramente logici »), equivale a credere di potere rinunziare appunto a quell'attività psichica che sola ci permette di dedurre conseguenze o stabilire « relazioni logiche » nuove dalle premesse ammesse; e questo perchè ogni deduzione, anche nella logica più pura e più formale, altro non è, ripetiamo, che una combinazione di operazioni od esperienze semplicemente immaginate.[1]

Queste operazioni d'ordine generalissimo su classi che la logica classica esprimeva colle proposizioni del linguaggio comune e col loro concatenamento nelle forme sillogistiche la logica matematica ha inteso esprimere mediante appositi algoritmi e corrispondenti trasformazioni simboliche.

Le è bastato all'uopo di chiamare con lettere le diverse classi e di ricorrere a pochissimi segni, inventati appositamente, per indicare rispettivamente: l'*uguaglianza* fra oggetti (già distinti l'uno dall'altro perchè considerati sotto punti di vista rispettivamente diversi) o fra classi di oggetti (fra loro distinte dal punto di vista della comprensione, cioè delle proprietà che le caratterizzano, e risultanti poi identiche per estensione, cioè per il numero dei propri componenti), l'*appartenenza* di oggetti a classi, l'*inclusione* di classi in altre classi, la *riunione* e la *intersezione* di classi (dette anche « addizione » e « moltiplicazione » logica per alcune proprietà che esse hanno a comune colle operazioni algebriche di tal nome; e la seconda delle quali Boole aveva chiamato col nome di « elezione », consistendo in sostanza nello scegliere entro una data classe di oggetti una data particolare sottoclasse di questi ultimi), nonchè i quattro principali casi di appartenenza o d'inclusione, originari o conseguenti da date operazioni, consistenti nel non contenere una classe che *un solo oggetto*, o *tutti gli oggetti che non appartengono a un'altra data classe*, o *nessun oggetto*, o *tutti gli oggetti di cui si discorre;* colle quali relazioni e operazioni fra oggetti e classi e fra classi e classi la logica ma-

[1] Cfr., su questa pretesa di alcuni matematici e di molti logici-matematici, p. es., A. Voss, op. cit.: *Ueber das Wesen d. Math.*, pag. 83, 87; L. Couturat, *Les principes des mathématiques*, Alcan, Paris, 1905, pag. 288; H. Poincaré, *Les mathématiques et la logique*, « Revue de Métaph. et de Mor. », Nov. 1905, pag. 825, 829-830; L. Brunschvicg, op. cit.: *Les étapes de la philos. math.*, pag. 400.

tematica è venuta così a rappresentare tutti i rapporti logici possibili. [1]

Dopo di che, profittando dei suddetti risultati già forniti dalla esperienza più famigliare di tutti i giorni, relativi a inclusioni, riunioni, intersezioni, ecc., di classi — quale quella del contenente-contenuto e simili — o aiutandosi colla rappresentazione concreta delle classi stesse a mezzo di regioni dello spazio o di circoli del piano, ha trovato, nella stessa guisa che i matematici pel calcolo algebrico, le proprietà dei simboli e le conseguenti leggi del calcolo logico, cioè le regole che devono presiedere alla trasformazione di date formule in altre equivalenti, onde esprimere queste operazioni su classi e i loro risultati. [2]

Ha così trovato, p. es., che le proprietà commutativa, associativa, distributiva, ecc., analoghe a quelle che valgono per l'addizione e moltiplicazione algebrica, valgono anche per le operazioni logiche di riunione e intersezione di classi, mentre valgono per queste ultime e non per le prime altre proprietà che semplificano grandemente il calcolo logico in confronto a quello algebrico; ha riscontrato, inoltre, che altre proprietà, quali la riflessiva, la simmetrica, la transitiva, esse pure analoghe alle corrispondenti dell'algebra, valgono per certe relazioni logiche e non per altre; e così via, e così via: ha fissato, insomma, in tal modo, date regole del calcolo logico, le quali, *una volta così stabilite per via empirica,* permettono in seguito di dimostrare, analogamente al calcolo algebrico, altre verità logiche, per via di pure trasformazioni di calcolo. [3]

Pure trasformazioni di calcolo, però, le quali, in quanto soddisfacenti a tali regole, non cessano esse pure — inconsapevolmente per il calcolatore che le usi ormai macchinalmente — di rappresentare altre consimili esperienze generalissime di inclusioni, riunioni, intersezioni, ecc., di classi.

[1] Cfr., p. es., A. Padoa, *La logique déductive dans sa dernière phase de développement*, Gauthier-Villars, Paris, 1912, pag. 21-41; G. Peano, *Notations de logique mathématique, Introduction au formulaire de mathématique* publié par la «Riv. di Mat.», Turin, 1894, in ispecie pag. 4, 7 e seg.; G. Vailati, *La logique mathématique et sa nouvelle phase de développement dans les écrits de M. G. Peano*, in: *Scritti di G. Vailati*, Firenze, Seeber, 1911, pag. 230 e seg.

[2] Cfr., p. es., A. N. Whitehead, *A Treatise on universal Algebra*, Vol. I, University Press, Cambridge, 1898, pag. 38 e seg.

[3] Cfr., p. es., A. Padoa, op. cit.: *La log. déd., etc.*, pag. 62-73, 95-96; L. Couturat, op. cit.: *Princ. des math.*, pag. 10 e seg.; lo stesso, *L'algèbre de la logique*, Gauthier-Villars, Paris, 1905, pag. 1-25.

Dalle relazioni e operazioni concernenti le classi si è poi passati facilmente a quelle concernenti le proposizioni, le quali, in forma più o meno diretta o indiretta, non stanno in sostanza a indicare che le relazioni e operazioni medesime, le « predicazioni » non esprimendo, infatti, che appartenenze di oggetti a classi o inclusioni di classi in altre classi. Tutte le relazioni della grammatica si riscontra allora potere venire espresse per mezzo dei segni della logica matematica, che raffigurano *ideograficamente* non altro che relazioni e operazioni concernenti classi. L'ideografia logica e la logica matematica vengono pertanto a fornire, rispettivamente, il vocabolario e la sintassi comuni a tutte le scienze deduttive. [1]

Il primo vantaggio così ottenuto con tale « ideografia logica » è stato quello di costituire un sistema il più conciso possibile di *scrittura universale* indipendente da qualsiasi lingua; in altre parole, di fornire uno strumento di *traduzione* o *trascrizione* simbolico-stenografica, a scopo di economia di spazio e di comprensione internazionale, di date teorie deduttive già costruite, in ispecie matematiche; servendosi all'uopo, oltre che dei simboli logici propriamente detti, anche di quelli rappresentanti gli elementi fondamentali relativi a quella data teoria deduttiva che si vuole così trascrivere. L'applicazione più tipica ne è il ben noto « Formulario » del Peano, che costituisce così una pura e semplice *ricostruzione* e un condensato *repertorio* di date teorie matematiche e dei loro principali risultati, rispettivamente già costruite e già trovati coi metodi matematici ordinari. [2]

Un secondo vantaggio che i logistici si sono ripromessi dal loro simbolismo è stato quello di riparare all'imprecisione del linguaggio ordinario e di procurarsi così un mezzo più delicato e più perfetto di analisi e di espressione scientifica. Per es., certi termini grammaticali, come la parola *alcuni*, per la dubbia loro estensione, possono dar luogo ad espressioni ambigue; altri termini del linguaggio comune assumono

[1] Cfr., p. es., G. PEANO, op. cit.: *Notations de log. math.*, pag. 18 e seg., 42 e seg.; G. VAILATI, saggio cit.: *La log. math. et sa nouv. phase de dév.*, pag. 236; L. COUTURAT, op. cit.: *Princ. des math.*, pag. 2 e seg., 16 e seg.; lo stesso, op. cit.: *L'alg. de la log.*, pag. 3 e seg.; A. PADOA, op. cit.: *La log. déd., etc.*, pag. 19 et seg., 45 e seg.

[2] Cfr., p. es., lo stesso G. PEANO, op. cit.: *Notations de log. math.; Introduct. au formulaire de math.*; e: M. WINTER, *La méthode dans la philosophie des mathématiques*, Alcan, Paris, 1911, pag. 60, 65.

spesso un significato diverso a seconda dell'insieme della frase in cui si trovano o del posto occupato nel periodo, mentre a scopo di rigore scientifico sarebbe bene che ad ogni termine corrispondesse sempre un unico significato; le « predicazioni » della lingua parlata non distinguono per lo più se il soggetto della proposizione è un individuo singolo od una classe, cioè se la proposizione esprime un'appartenenza o un'inclusione, e, nel primo caso, non dicono chiaramente se il soggetto è o no l'unico individuo della classe costituita dal predicato, nè la forma verbale d'un tale predicato precisa talvolta a sufficienza quale sia effettivamente la classe che esso sta a rappresentare; e così via, e così via. Sostituendo quindi alle forme verbali, spesso presentanti tali o consimili ambiguità, dei simboli rigorosamente definiti, la logistica acquista così, sostengono i suoi patrocinatori, una precisione molto maggiore che permette di sottomettere a un'analisi più precisa e più metodica tutte le teorie deduttive.[1]

Vantaggio, questo, d'una maggior precisione di espressione e di una maggior delicatezza di analisi, che non si può certo negare, ma che è stato grandemente esagerato, sia perchè il linguaggio comune ha in sè stesso i mezzi di riparare, con opportune circonlocuzioni, all'ambiguità di certe sue forme, sia perchè la riflessione ordinaria rivolta, *non tanto sulle espressioni verbali traducenti il ragionamento, quanto, indipendentemente da queste ultime, sul ragionamento sostanziale stesso quale serie di esperienze « tangibili » semplicemente pensate,* cioè quale processo immaginato e seguito dall'« occhio della mente », — rivolta, insomma, sul ragionamento effettivo a base *di cose* anzichè sul suo rivestimento a mezzo *di parole,* — resta e resterà sempre, nella maggior parte dei casi, il miglior modo, sebbene meno metodico, di evitare conclusioni errate: Appunto perchè ci si sottrae così senz'altro ai pericoli che sempre provengono, nel giudicare della legittimità di date combinazioni e constatazioni mentali, dal perdere di vista queste ultime, che il linguaggio avrebbe l'ufficio di richiamare semplicemente alla memoria, e dall'affidarsi in loro vece esclusivamente al linguaggio stesso o a qualsiasi altro processo di espressione formale, che di tali processi mentali possono sempre non es-

[1] Cfr., per es., A. Padoa, op. cit.: *La log. déd., etc.*, pag. 11-12, 60; F. Enriques, op. cit.: *Probl. della scienza*, pag. 159-161; L. Couturat, op. cit.: *Princ. des math.*, VI.

sere che traduzioni grossolane più o meno infedeli: « Non si può prendere nessuna peggior abitudine, scrive il Jevons stesso, di quella di accontentarsi di parole invece che della vera conoscenza delle cose. Noi non dovremmo mai perdere alcuna occasione di imparare a conoscere, per mezzo dei nostri sensi, le forme, le proprietà e i cambiamenti delle cose, affinchè il linguaggio che adoperiamo possa, per quanto è possibile, venire usato *intuitivamente,* e affinchè possiamo così evitare le assurdità e le fallacie nelle quali si può altrimenti cadere ».[1]

Terzo vantaggio perseguito, fin già dal Leibniz stesso, era quello di pervenire, a risparmio di lavoro intellettuale, a « meccanizzare » il ragionamento, riducendolo a semplici trasformazioni di formule effettuabili secondo norme fisse e per così dire automatiche come nell'algebra; colla speranza anche che, col facilitare così tutte le combinazioni possibili fra i simboli, si sarebbe giunti, anche in questo campo, a scoprire continui risultati nuovi, non pochi magari dei quali il ragionamento ordinario, affidato alla fantasia combinatrice solo di operazioni od esperienze intuibili, difficilmente avrebbe forse trovato. Si sperava, in altre parole, che la logistica, strumento d'analisi, collo scoprire e mettere in evidenza gli elementi costitutivi di tutti quanti i ragionamenti possibili, avrebbe poi potuto pervenire, come appunto è successo per la chimica, a sintesi o risultati complessi nuovi coll'associare fra loro nei più svariati modi questi elementi.[2]

Invece, da quanto abbiamo esposto risulta chiaro essere vano sperare che, in quanto a *fecondità,* il simbolismo logico possa mai neppur lontanamente paragonarsi a quello algebrico. Il calcolo logico, infatti, per la sua stessa natura, non è e non può essere che un mezzo di verifica, non mai di scoperta; può essere come il microscopio, come la lente dell'orologiaio che riscontra l'assenza o la presenza di qualche piccola imperfezione nei complicati e minuti ingranaggi del meccanismo *già costruito,* ma che non può essere di nessun aiuto *nell'ideare* quest'ultimo. Giustamente è stato detto che la logistica può

[1] STANLEY JEVONS, *Elementary Lessons in Logic* (First Edition, 1870), Macmillan, London, 1909, pag. 59-60.

[2] Cfr., p. es., G. VAILATI, *Sul carattere del contributo apportato dal Leibniz allo sviluppo della logica formale*, in op. cit.: *Scritti di G. Vailati*, pag. 619 e seg.; L. BRUNSCHVICG, op. cit.: *Les étapes de la philos. math.*, pag. 375, 402; A. PADOA, op. cit.: *La log. déd., etc.*, pag. 839.

fare dei « periti » di controllo, non dei ragionatori inventori; che essa può dare fascie di sostegno, per non cascare, al non sicuro di sè, ma non ali alla fantasia costruttrice d'un ragionamento nuovo; che essa sta rispetto al vero ragionamento fecondo come la metrica e l'armonia stanno alle creazioni del genio poetico e del genio musicale; e che i fatti stanno appunto lì a dimostrare che essa non ha mai risolto da sola alcun problema nè contribuito mai neppure in piccola parte alla creazione di alcuna nuova teoria. [1]

Questa *aridità* o *sterilità* della logistica che tanto contrasta colla sì grande fertilità dell'algebra è insita, ripetiamo, nella sua stessa natura. E questo per due ragioni d'ordine fondamentale:

Anzitutto, il fatto che la logistica non consta, in sostanza, che di operazioni di *catalogamento* di prodotti già ottenuti per mezzo del ragionamento creatore implica di necessità l'opera preventiva di quest'ultimo onde dare alla logistica stessa, in ogni e qualsiasi sua applicazione, la materia prima su cui esercitarsi. È solo quando il ragionamento inventore, sospinto dal libero giuoco della fantasia, ha condotto a risultati nuovi, che si può procedere a ordinare questi ultimi pazientemente e metodicamente. La deduzione, sia sillogistica, sia, a fortiori, logistica, può quindi procedere passo a passo e metodica solo nella sua fase *sistematrice,* non in quella creatrice, ove impera e deve imperare sovrana la fantasia. [2]

In secondo luogo, se invece si rinunzia a scendere ad alcuna applicazione, allora è la stessa troppo grande *indeterminatezza* della natura dei fenomeni, cui si riferiscono le operazioni semplicemente pensate costituenti la logistica, che fa sì che alla fantasia combinatrice delle operazioni stesse semplicemente pensate venga tolta ogni possibilità di esercitarsi: Mentre nell'algebra, infatti, come abbiamo visto, il rispettivo simbolismo permette alla fantasia combinatrice, anche in mancanza d'una significazione più concreta e sintetizzatrice, di farsi pur sempre un'idea abbastanza tangibile dei fatti sui

[1] Cfr., p. es., L. Couturat, op. cit.: *Princ. des math.*, pag. 34-35: A. Padoa, op. cit.: *La log. déd., etc.*, pag. 15-16; H. Poincaré, *Les mathématiques et la logique*, « Rev. de Métaph. et de Mor. », mai 1906, pag. 295; L. Couturat, *Pour la logistique*, « Revue de Métaph. et de Mor. », mars 1906, pag. 215; M. Winter, op. cit.: *La méth. dans la philos. des math.*, pag. 60, 65.

[2] Cfr., p. es., E. Mach. *Erkenntnis und Irrtum*, Leipzig, Barth, 1906, p. 318.

quali essa deve operare, e questo grazie al fatto dell'*omogeneità* dei fenomeni, tutti di natura quantitativa, che il simbolismo stesso sta a rappresentare; nella logistica, invece, la grande indeterminatezza dei simboli fa sì che essi stanno a rappresentare, indistintamente e contemporaneamente, fenomeni *i più eterogenei possibili,* di guisa che viene a mancare ogni possibilità di qualsiasi interpretazione concreta, neppure lontanissima, che possa ad un tempo far nascere nel ragionatore *l'interesse per il proprio ragionamento* e permettergli *la veduta sintetica dell'insieme* di quest'ultimo. Senza questo interesse, manca allora ogni stimolo ad ideare quelle combinazioni capaci di condurre alla meta desiderata o comunque a qualche risultato che possa sembrare importante, e manca persino qualsiasi criterio di valutazione o di scelta di fronte alle infinite combinazioni simboliche, tutte indifferentemente ottenibili col puro giuoco fortuito del calcolo meccanico; mentre senza questa veduta sintetica dell'insieme del ragionamento, e senza il corrispettivo nesso affettivo che vi si riallacci, viene a mancare alla fantasia anche ogni filo conduttore atto a dare unità a tutto quanto il processo combinatorio.[1]

In altre parole, quando l'astrazione sorpassa un dato limite, sì da comprendere nei rispettivi concetti le cose più eterogenee possibili, cioè quando da *astrazione* diviene *indeterminatezza completa,* allora tutti i vantaggi che si hanno sempre nel passare da un ragionamento concreto e particolare ad uno più astratto e generale — e che il Russell pretende si debbano avere al loro massimo grado nella logistica — vengono invece a cessare; appunto perchè si rende con ciò impossibile lo stimolo *a nuove ricerche sperimentali semplicemente pensate,* cioè a nuovi ragionamenti da tentare nei più vari sensi, che proviene dall'uso di immagini, di rappresentazioni concrete, nelle quali ogni concetto sia pure astratto quanto si vuole, ma che comprenda cose che almeno da un dato solo punto di vista possano considerarsi come omogenee, è sempre invece traducibile.[2]

Non solo, chè mentre l'algebra, pure operante col suo

[1] Cfr. H. Poincaré, saggio cit.: *Les math. et la log.*, in op. cit.: *Science et Méth.*, pag. 158; lo stesso, *Les définitions mathématiques et l'enseignement*, « ibid. », 133-134, 137; A. Voss, op. cit.: *Ueber das Wesen d. Math.*, pag. 28.

[2] Cfr. B. Russell, *L'importance philosophique de la logistique*, « Revue de Métaph. et de Mor. », mai 1911, pag. 286; E. Mach, op. cit.: *Erk. u. Irrt.*, pag. 249.

simbolismo su fenomeni già di per sè sufficientemente tangibili all'immaginazione perchè di natura omogenea, si è ciò non ostante di continuo sforzata, come abbiamo visto, colla geometria analitica, colla meccanica e colla fisica matematica in genere, e colla stessa inversione simbolica, di « concretizzare » od « oggettivare sinteticamente » il più possibile i suoi simboli e le sue formule, e ciò allo scopo di eccitare e provocare appunto la fantasia combinatrice; i logistici, invece, si sono fatti un punto d'onore di « sconcretizzare » il più possibile i simboli propri, di vuotarli colla più scrupolosa e minuziosa cura d'ogni contenuto d'intuitiva evidenza o suscettibile comunque di dare all'immaginazione il benchè minimo appiglio. Così facendo, la logistica, già dunque sterile per la sua stessa natura, veniva ad aggravare sempre più questa sua sterilità deliberatamente.[1]

Non ci soffermeremo, infine, sull'ultima e più esagerata pretesa di alcuni logistici, quali il Russell e il Couturat, che la logistica possa servire da sola a costruire tutte le matematiche, senza bisogno di alcun ricorso ad ulteriori induzioni: il solo fatto che la logistica non è di per sè che un metodo di catalogamento, suscettibile di servire per tutte le sorta possibili di operazioni od esperienze semplicemente pensate e pei loro risultati, implica che per scendere da questo catalogamento d'ordine generalissimo ai catalogamenti particolari, valevoli solo per date categorie di operazioni od esperienze, sia necessario conoscere in più quelle proprietà particolari che differenziano queste date categorie da tutte le altre. Ed è noto, infatti, come nelle loro definizioni, p. es., degli elementi aritmetici e delle operazioni da eseguirsi su di essi i logistici non facciano che esprimere le proprietà fondamentali delle operazioni aritmetiche che l'aritmetica e l'algebra stesse hanno dimostrato sufficienti a servir loro da base per dedurne tutto il loro mirabile edificio.[2]

Cosicchè possiamo concludere che se la logistica, in quanto sistema di trascrizione steno-ideografica internazionale, ha rag-

[1] Cfr., p. es., L. COUTURAT, op. cit.: *Princ. des math.*, pag. 7-8.

[2] Cfr., p. es., L. COUTURAT, op. cit.: *Princ. des math.*, pag. 5, 25-26; H. POINCARÉ, saggio cit.: *Les math. et la logique*, in op. cit.: *Science et méth.*, pag. 164-170; M. WINTER, op. cit.: *La méth. dans la philos. des math.*, pag. 48, 72, 98-100; G. LUCAS DE PESLOÜAN, *Les systèmes logiques et la logistique*, Rivière, Paris, 1909, pag. 269.

giunto lo scopo propostosi, e, in quanto sistema di controllo del rigore logico, può riuscire talvolta utile, è invece condannata, come mezzo di scoperta, alla sterilità più completa, nè tanto meno può pretendere di costituire, da sola, la matrice feconda di tutta la scienza matematica.

E che quindi psicologicamente del tutto errato sarebbe di sperare dal simbolismo logistico, neppure lontanamente, quei vantaggi veramente immensi che l'introduzione del rispettivo simbolismo ha invece avuto nelle matematiche propriamente dette.

E con ciò abbiamo terminato questa rapidissima e ad un tempo forse troppo lunga scorsa data alle forme superiori del ragionamento; la quale però ci è sembrata necessaria onde cercare di porre bene in evidenza che la natura fondamentale del ragionamento, in quanto serie di operazioni od esperienze semplicemente pensate, rimane intatta anche là dove un'astrazione spinta oltre ogni limite e una veste simbolica oltremodo complessa possono riuscire a primo aspetto a nasconderla e persino a sfigurarla.

Bastava, del resto, il nome stesso di calcolo, ancora conservato alle operazioni della matematica, a testimoniare indelebilmente come la grande nobiltà odierna delle forme supreme del ragionamento tragga la sua umile origine da quelle primissime operazioni di conteggio che su cumuli e poi su filari di pietruzze effettuarono materialmente e penosamente i nostri antichi progenitori, certo ignari che da tali sì modeste e sì pratiche operazioni potesse poi, per virtù di infinite generazioni di menti le più elette, spiccare il suo ardito volo la fantasia creatrice d'un poema sì ricco e sì meraviglioso.

Milano.

Anno - Année / Jahr - Year IX. 1 - I - 1915 Vol. / Band XVII, N. XXXIX-1

"SCIENTIA,"

(RIVISTA DI SCIENZA)

Organo internazionale di sintesi scientifica - Revue internationale de synthèse scientifique
Internationale Zeitschrift für wissenschaftliche Synthese - International Review of Scientific Synthesis.

INDEX

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI

LONDON — WILLIAMS AND NORGATE | PARIS — FÉLIX ALCAN | LEIPZIG — WILHELM ENGELMANN

Direzione e Redazione: Milano, Via Aurelio Saffi, 11.

Articles déjà publiés par "SCIENTIA„

Abegg, R. (*Breslau*): Chemische Affinität, Valenz und das natürliche System der Elemente (L'affinité chimique, la valence et le système naturel des éléments). – **1910**, n. **3**.
André, Ch. (*Lyon*): L'hypothèse nébulaire de Laplace et la théorie de la capture de M. T. J. J. See. – **1912**, n. **2**.
Arrhenius, S. (*Stockholm*): Die Unendlichkeit der Welt (L'univers infini). – **1909**, n. **2**.
— Ueber den Ursprung des Gestirnkultus (Sur l'origine du culte des astres) – **1911**, n. **2**.
Asher, L. (*Bern*): Die Beziehungen zwischen Struktur und Funktion im tierischen Organismus (Les relations de la structure et la fonction dans l'organisme animal) – **1909**, n. **1**.
Bayliss, W. M (*London*): The functions of enzymes in vital processes (Les fonctions des enzymes dans les processus vitaux). – **1910**, n. **4**.
Becher, S (*Giessen*): Ueber Handlungsreaktionen und ihre Bedeutung für das Verständnis der organischen Zweckmässigkeit (Sur les réactions-actes et leur signification pour l'intelligence de la finalité organique). – **1910**, n. **4**.
Bethe, A. (*Strassburg*): Neuere Vorstellungen über die Natur der bio-elektrischen Ströme (Les idées modernes sur la nature des courants bio-électriques). – **1910**, n. **3**.
Bohlin, K. (*Stockholm*): Was ist die Milchstrasse? (Qu'est-ce que la voie lactée?). – **1910**, n. **4**.
— Die veränderlichen Sterne (Les étoiles variables). – **1912**, n. **4**.
Bohn, G (*Paris*): Le psychisme chez les animaux inférieurs. – **1909**, n. **1**.
Bonar, J. (*Ottawa - Canada*): Home trade and foreign trade (Commerce intérieur et commerce international). – **1908**, n. **4**.
Bonnesen, T. (*Kopenhagen*): La réforme de l'enseignement des mathématiques élémentaires. – – **1907**, n. **4**.
Borel, E. (*Paris*): Le continu mathématique et le continu physique. – **1909**, n. **3**.
Bortkiewicz, L. (*Berlin*): Die statistischen Generalisationen (Les généralisations statistiques). – **1909**, n. **1**.
Bottazzi, F. (*Napoli*): La chimica fisica e la fisiologia (Chimie physique et physiologie). – **1909**, n. **4**.
Boruttau, H. (*Berlin*): Die innere Sekretion (La sécrétion interne). – **1908**, n. **3**.
Bouasse, H. (*Toulouse*): Développement historique des théories de la physique. – **1910**, n. **2**.
Boutroux, P. (*Poitiers*): L'évolution des mathématiques pures. – **1909**, n. **3**.
Brillouin, M. (*Paris*): Propos sceptiques au sujet du principe de relativité. – **1913**, n. **1**.
Brunhes, B. (*Clermont Ferrand*): La diversité de fortune des deux principes de la thermodynamique. – **1910**, n. **1**.
Bruni, G. (*Padova*): Le soluzioni solide (Les solutions solides). – **1908**, n. **3**.
— La chimica fisica nei suoi rapporti con le scienze biologiche (La chimie physique dans ses rapports avec les sciences biologiques). – **1909**, n. **3**.
— L'opera di J. H. van't Hoff (L'œuvre de J. H van't Hoff). – **1911**, n. **3**.
Bryan, G H. (*Bangor*): Diffusion and dissipation of energy (Diffusion et dissipation de l'énergie). – **1909**, n. **1** et **2**.
Caetani, L. (*Roma*): La funzione dell'Islám nella evoluzione della civiltà (La fonction de l'Islam dans l'évolution de la civilisation) – **1912**, n. **3**.
Cardinali, G. (*Bologna*): Le ripercussioni dell'imperialismo sulla vita interna di Roma (Les répercussions de l'impérialisme sur la vie intérieure de Rome). – **1913**, n. **3**.
— Roma e la civiltà ellenistica (Rome et la civilisation hellénique). – **1913**, n. **4**.
Carver, T. N. (*Cambridge - U. S A.*): The english classical school of political economy (L'école classique anglaise d'économie politique). – **1907**, n. **2**.
— Diminishing returns and value (Diminution du rendement et de la valeur). – **1909**, n. **4**.
Castelnuovo, G. (*Roma*): Il valore didattico della matematica e della fisica (La valeur didactique des mathématiques et de la physique). – **1907**, n. **2**.
— Il principio di relatività e i fenomeni ottici (Le principe de relativité et les phénomènes optiques). – **1911**, n. **1**.
Caullery, M. (*Paris*): La méthode et les critères de la morphologie. – **1908**, n. **3**.
Celoria G. (*Milano*): L'opera di Giovanni Schiaparelli (L'œuvre de Giovanni Schiaparelli). – – **1911**, n. **2**.
Chwolson, O. (*St. Pétersbourg*): Dürfen wir die physikalischen Gesetze auf das Universum anwenden? (Peut-on appliquer les lois de la physique à l'Univers?). – **1910**, n. **3**.
Ciamician, G. (*Bologna*): Problemi e metodi della chimica organica (Problèmes et méthodes de la chimie organique). – **1907**, n. **1**.
— La fotochimica dell'avvenire (La photochimie de l'avenir). – **1912**, n. **6**.

Claparède, E. (*Genève*): La fonction du sommeil - **1907**, n. **3**.

Costantin, J. (*Paris*): Les progrès de la culture des fleurs et leur importance pour les théories transformistes. - **1911**, n. **3**.

Crommelin, A. C. D. (*Greenwich*): The origin and nature of comets (Origine et nature des comètes). - **1910**, n. **2**.

Cunningham, W. (*Cambridge - England*): Impartiality in history (L'impartialité de l'historien). - **1907**, n. **1**.

Darwin, G. H. (*Cambridge - England*): The rigidity of the earth (La rigidité de la Terre). - **1901**, n. **2**.

De Boissoudy, J. (*Clermont-Ferrand*): Le problème de la constitution de l'atome. - **1911**, n. **4**.

Delage, Y. (*Paris*): La parthénogenèse expérimentale et les propriétés des solutions électrolytiques. - **1907**, n. **3**.

De Marchi, L. (*Padova*): Che cos'è la Terra? (Qu'est-ce que la Terre?). -**1907**, n. **2**.

— Teorie geologiche: come si formano le montagne (Théories géologiques: comment se forment les montagnes). - **1909**, n. **4**.

— Nuove teorie sulle cause dell'era glaciale (Nouvelles théories relatives aux causes de l'ère glaciaire). - **1911**, n. **2**.

De Martonne, E. (*Paris*): Le climat facteur du relief. - **1913**, n. **3**.

Demoor, J (*Bruxelles*): A propos du mécanisme des phénomènes d'irritabilité. - **1909**, n. **3**.

Dionisi, A. (*Modena*): Il concetto di malattia (Le concept de maladie). - **1908**, n. **2**.

Doelter, C. (*Wien*): Die Anwendung der physikalischen Chemie auf Mineralogie und Geologie (La chimie physique appliquée à la minéralogie et à la géologie). - **1908**, n. **1**.

Driesch, H. (*Heidelberg*): Die Physiologie der individuellen organischen Formbildung (La physiologie du développement de la forme organique individuelle). - **1907**, n. **2**.

Dussaud, R. (*Paris*): Le rôle des Phéniciens dans la Méditerranée primitive. - **1913**, n. **1**.

Ebstein, W. (*Göttingen*): Zur Geschichte der Entwicklung des Krankheitsbegriffes (Pour l'histoire du concept de maladie). - **1908**, n. **1**.

Eddington, A. S. (*Greenwich*): Star-Streams (Les courants stellaires). - **1910**, n. **3**.

Edgeworth, F. Y. (*Oxford*): On the use of differential calculus in economics (De l'usage du calcul différentiel en économie politique). - **1910**, n. **1**.

Emery, C. (*Bologna*): Il polimorfismo e la fondazione delle società negli insetti sociali (Le polymorphisme et la fondation des sociétés chez les insectes sociaux). - **1910**, n. **2**.

— Le piante formicarie (Les plantes à fourmis). - **1912**, n. **4**.

Engelmeyer, P. K. (*Moscou*): Heurologischer Wert der technischen Erfindung (La valeur heurologique de l'invention technique). - **1911**, n. **3**.

Enriques, F. (*Bologna*): Heterodox science and is social function (La science hétérodoxe et sa fonction sociale). - **1907**, n. **2**.

— Le principe d'inertie et les dynamiques non-newtoniennes. - **1907**, n. **3**.

— L'università italiana (L'université italienne). - **1908**, n. **1**.

— La riforma dell'università italiana (La reforme de l'université italienne). - **1908**, n. **2**.

— Il principio di ragion sufficiente nella costruzione scientifica (Le principe de raison suffisante dans la construction scientifique). - **1909**, n. **1**.

— Razionalismo e storicismo (Rationalisme et historisme). - **1909**, n. **2**.

— La teoria dello stato e il sistema rappresentativo (La théorie de l'état et le système représentatif). - **1909**, n. **3**.

— La filosofia positiva e la classificazione delle scienze (La philosophie positive et la classification des sciences). - **1910**, n. **2**.

— Il pragmatismo (Le pragmatisme). - **1910**, n. **3**.

— I numeri e l'infinito (Les nombres et l'infini). - **1911**, n. **1**.

— Il problema della realtà (Le problème de la réalité). - **1911**, n. **2**.

— Matematiche e teoria della conoscenza (Mathématiques et théorie de la connaissance). - **1912**, n. **1**.

— Il significato della critica dei principii nello sviluppo de le matematiche (La critique des principes et son rôle dans le développement des mathématiques). - **1912**, n. **5**.

Enriques, P. (*Bologna*): La morte (La mort). - **1907**, n. **3**.

— — — et **Gortani,** M. (*Bologna*): La successione degli strati e la teoria dei periodi geologici (La succession des couches et la théorie des périodes géologiques). - **1909**, n. **4**.

Fabry, Ch. (*Marseille*): La théorie électromagnétique de l'univers. - **1907**, n. **4** et **1908**, n. **1**.

Fano, Gino (*Torino*): La geometria non-euclidea (La géométrie non-euclidienne). - **1908**, n. **4**.

Fano, Giulio (*Firenze*): Chimica e biologia (Chimie et biologie). - **1907**, n. **4**.

Findlay, Alex. (*Aberystwith*): Osmotic pressure and the theory of solutions (La pression osmotique et la théorie des solutions). - **1912**, n. **4**.

— Heterogeneous equilibrium and the phase rule (L'équilibre hétérogène et la loi des phases). - **1913**, n. **4**.

Fisher, I. (*New-Haven, Conn., - U. S. A.*): The « impatience » theory of interest (Une théorie de l'intérêt fondée sur l'impatience). - **1911**, n. **2**.

Foà, P. (*Torino*): Il significato biologico dei tumori (La signification biologique des tumeurs). - **1908**, n. **1**.

Fournier d'Albe, E. E. (*Birmingham*): Interstellar space (L'espace interstellaire). - **1913**, n **4**.

Fowler, A. (*London*): The chemical unity of the cosmos (L'unité chimique du monde). – **1911**, n. 4.
Francé, R. H. (*München*): Das Reaktionsvermögen der Pflanze (Le pouvoir de réaction des plantes). – **1909**, n. 4.
Fredericq, L. (*Liège*): De la coordination organique par action chimique. – **1909**, n. 2.
— Les moyens de défense physiques et chimiques dans le règne animal. – **1913**, n. 4.
Freud, S. (*Wien*): Das Interesse an der Psychoanalyse. I. Teil: Das psychologische Interesse (L'intérêt de la psycho-analyse. Ière Partie: Son intérêt pour la psychologie). – **1913**, **n. 5.**
— Das Interesse an der Psychoanalyse. II. Teil: Ihr Interesse für die anderen Wissenschaften (L'intérêt de la psycho-analyse. IIème Partie: Son intérêt pour les autres sciences). – **1913**, n. 6.
Galeotti, G. (*Napoli*): Le teorie sulla immunità (Les théories sur l'immunité). – **1910**, n. 1.
— La dottrina degli anticorpi (L'état de nos connaissances sur les anticorps). – **1910**, n. 2.
Gini, C. (*Bologna*): Che cos'è la probabilità? (Qu' est-ce que la probabilité?) – **1908**, n. 2.
Giuffrida-Ruggeri, V. (*Napoli*): Il pithecanthropus erectus e l'origine della specie umana (Le pithecanthropus erectus et l'origine de l'espèce humaine). – **1907**, n. 4.
Goblot, E. (*Lyon*): Le concept et l'idée. – **1912**, n. 1.
Grammont, M. (*Montpellier*): Phonétique historique et phonétique expérimentale. – **1912**, n. 4.
Gregory, Y. W. (*Glasgow*): The structural and petrographic classifications of coast-types (Les classifications structurelle et pétrographique des types des côtes). – **1912**, n. 1.
Guignebert, Ch. (*Paris*): Les origines chrétiennes. – **1910**, n. 3.
— L'évolution du christianisme ancien. – **1910**, n. 4.
— De Saint Augustin à Pie X. – **1911**, n. 1.
— Le dogme de la Trinité. Ière Partie: Les triades primitives et la formule baptismale. – **1913**, n. 6.
Günther, S. (*München*): Pseudo- und kryptovulkanische Erdbeben (Tremblement de Terre pseudo- et crypto-volcaniques). – **1913**, n. 4.
Haberlandt, G. (*Gratz*): Ueber Bewegung und Empfindung im Pflanzenreich (Du mouvement et de la sensibilité dans le règne végétal). – **1908**, n. 2.
Hahn, E. (*Berlin*): Die Entstehung der Bodenwirtschaft (Les origines de l'économie agricole). – **1911**, n. 1.
Hartog, M. (*Cork*): The dynamics of mitotic celldivision (La dynamique de la division cellulaire mitotique). – **1907**, n. 3.
Henslow, G. (*Bournemouth*): Ecology considered as bearing upon the evolution of plants (L'écologie au point de vue de l'évolution des végétaux). – **1913**, n. 2.
Herbertson, A. J. (*Oxford*): The higher units. A geographical essay (Les unités supérieures. Essai géographique). – **1913**, n. 5.
Hertwig, O. (*Berlin*): Disharmonische Idioplasmaverbindungen und ihre Folgen (Fusions disharmoniques de l'idioplasma et leurs produits). – **1912**, n. 6.
Herz, N. (*Wien*): Die Eiszeiten (Les époques glaciaires). – **1911**, n. 1.
— Philosophische Konzeption und mathematische Analyse in der Weltbetrachtung (Conception philosophique et analyse mathématique dans l'observation de l'Univers). – **1911**, n. 3.
— Die Entwicklung der Erde (L'évolution de la Terre). – **1912**, n. 2.
Hinks, A. R. (*Cambridge*): The measurement of celestial distances (La mensuration des distances célestes). – **1912**, n. 3.
Höber, R. (*Kiel*): Die biologische Bedeutung der Kolloide (La valeur biologique des colloïdes). – **1910**, n. 1.
Hoernes, Moriz (*Wien*): Die körperlichen Grundlagen der Kulturentwicklung (Les bases structurales du développement intellectuel). – **1910**, n. 2.
— Die ältesten Formen der menschlichen Behausung und ihr Zusammenhang mit der allgemeinen Kulturentwicklung (Les plus anciennes formes de l'habitation humaine et leur relation avec le développement général de la civilisation). – **1911**, n. 3.
— Ursprung und älteste Formen der menschlichen Bekleidung (Origine et formes les plus anciennes du vêtement humain). – **1912**, n. 1.
Hoernes, Rudolf (*Graz*): Die Bedeutung der Paläontologie für die Erdgeschichte (La signification de la paléontologie pour l'histoire de la Terre). – **1911**, n. 4.
Jacobi, H. (*Bonn*): Was ist Sanskrit? (Qu'est-ce que le sanscrit?). – **1913**, n. 5.
Janet, P. (*Paris*): Le subconscient. – **1910**, n. 4.
Jespersen, O. (*Gentofte – Danemark*): Origin of linguistic species (L'origine des espèces linguistiques). – **1909**, n. 3.
Kapteyn, J. C. (*Groningen*): On the structure of the universe (Sur la structure de l'univers). – **1913**, n. 6.
Kidd, B. (*Oxford*): The two capital laws of sociology (Les deux lois fondamentales de la sociologie). – **1907**, n. 4 et **1908**, n. 1.
Kühnert, F. (*Wien*): Die ideographische Schrift und ihre Beziehung zum Sprachbau im Chinesischen (L'écriture idéographique et les rapports avec la formation de la langue dans le chinois). – **1913**, **n. 1.**
Landry, A. (*Paris*): Les trois théories principales de la population. – **1909**, n. 3.
— L'école économique autrichienne: Ière Partie: Histoire de l'école; ses conceptions méthodologiques. IIème Partie: Ses théories. Conclusion. – **1907**, **n. 3** et **4**.

Langevin, P. (*Paris*): L'évolution de l'espace et du temps. – **1911**, n. 3.
Lebedew, P. (*Moscou*): Die Druckkräfte des Lichtes (Les forces de pression de la lumière). – **1910**, n. 2.
Le Dantec, F. (*Paris*): Comment se pose la question de l'hérédité des caractères acquis. – **1908**, n. 4.
Lehmann, O. (*Karlsruhe*): Scheinbar lebende fliessende Kristalle, künstliche Zellen und Muskeln (Cristaux fluides ayant une apparence de vie organique; cellules et muscles artificiels). – **1908**, n. 4.
Levi, A. (*Firenze*): Il pensiero scientifico europeo nel secolo decimonono (La pensée scientifique en Europe au XIX siècle). – **1908**, n. 4.
Loisy, A. (*Paris*): La critique des évangiles. – **1910**, n. 4.
Loria, A. (*Torino*): L'indirizzo storico nella scienza economica (Le point de vue historique dans la science économique). – **1908**, n. 1.
Lowell, P. (*Flagstaff, Arizona - U. S. A.*): Mars (Mars). – **1910**, n. 1.
Lugaro, E. (*Modena*): Preformismo ed epigenesi nello sviluppo del sistema nervoso (Préformisme et épigénèse dans le développement du système nerveux). – **1910**, n. 2.
Mach, E. (*Wien*): Die Leitgedanken meiner naturwissenschaftlichen Erkenntnislehre und ihre Aufnahme durch die Zeitgenossen (Les idées directrices de ma théorie de la connaissance dans les sciences naturelles et l'accueil qu'elles ont reçu des contemporains). – **1910**, n. 2.
Maunder, E. W. (*Greenwich*): The « canals » of Mars (Les « canaux » de Mars). – **1910**, n. 2.
— The Sun-Spots (Les taches du Soleil). – **1913**, n. 1.
Maunier, R. (*Paris*): La sociologie française contemporaine. – **1910**, n. 3.
Mazzarella, G. (*Catania*): L'etnologia giuridica, i suoi metodi, i suoi risultati (L'ethnologie juridique, ses méthodes, ses résultats). – **1910**, n. 3.
Mecklenburg, W. (*Klausthal i. H.*): Die Lehre von den Elektrolytlösungen (La théorie des solutions électrolytiques). – **1913**, n. 6.
Meillet, A. (*Paris*): Linguistique historique et linguistique générale. – **1908**, n. 4.
— Différenciation et unification dans les langues. – **1911**, n. 2.
— L'évolution des formes grammaticales. – **1912**, n. 6.
Miceli, V. (*Palermo*): Gli elementi vivi del diritto (Les éléments vivants du droit). – **1910**, n. 4.
Mieli, A. (*Roma*): Le teorie delle sostanze nei presocratici greci. Iª Parte: Dalle prime speculazioni fino ad Empedocle (Les théories des substances chez les présocratiques grecs. Ière Partie: Des premières spéculations à Empédocle). – **1913**, n. 5.
— Le teorie delle sostanze nei presocratici greci. IIª Parte: Anassagora e gli atomisti (Les théories des substances chez les présocratiques grecs. IIème Partie: Anaxagore et les atomistes). – **1913**, n. 6.
Milhaud, G. (*Montpellier*): Cournot et le pragmatisme scientifique contemporain. – **1911**, n. 4.
Millosevich, E. (*Roma*): Dalla torre di Babele al laboratorio di Groninga (De la tour de Babel au laboratoire de Groningue). – **1912**, n. 5.
Moreux, Th. (*Bourges*): Le Soleil et la prévision des pluies. – **1910**, n. 4.
— Où nous entraîne notre Soleil? – **1913**, n. 5.
Naville, E. (*Genève*): La méthode scolastique dans la science du langage. – **1913**, n. 2.
Nernst, W. (*Berlin*): Sur quelques nouveaux problèmes de la théorie de la chaleur. – **1911**, n. 4.
Oppenheimer, F. (*Berlin*): Wesen und Entstehung des Kapitalismus (L'essence et l'origine du capitalisme). – **1908**, n. 2 et 4.
— Wert und Mehrwert. I. Teil: Die Monopol-Theorie des Mehrwertes (Valeur et plus-value. Ière Partie: La théorie de monopole de la plus-value). – **1913**, n. 2.
— Wert und Mehrwert. II. Teil: Kritik der Marx'sche Theorie des Mehrwertes (Valeur et plus-value. IIème Partie: Critique de la théorie de la plus-value de Marx). – **1913**, n. 3.
Ostwald, W. (*Leipzig*): Zur modernen Energetik (De l'énergétique moderne). – **1907**, n. 1.
— Der Wille und seine physische Grundlegung (La volonté et sa base physique). – **1911**, n. 2.
— Ueber Organisation und Organisatoren. I. Teil: Allgemeine Theorie (De l'organisation et des organisateurs. Ière Partie: Théorie générale). – **1912**, n. 5.
— Ueber Organisation und Organisatoren. II. Teil: Moderne Probleme (De l'organisation et des organisateurs. II.ème Partie: Problèmes modernes). – **1912**, n. 6.
Pareto, V. (*Losanne*): L'économie et la sociologie au point de vue scientifique. – **1907**, n. 2.
Pearl, R. (*Orono, Maine - U. S. A.*): Biometrical ideas and methods in biology: their significance and limitations (Les idées et méthodes biométriques en biologie: leur signification et leurs limitations). – **1911**, n. 3.
Perozzi, S. (*Bologna*): Socialismo giuridico (Le socialisme juridique). – **1911**, n. 3.
— Precetti e concetti nell'evoluzione giuridica (Préceptes et concepts dans l'évolution juridique). – **1912**, n. 3.
Pettazzoni, R. (*Roma*): La scienza delle religioni e il suo metodo (La science des religions et sa méthode). – **1913**, n. 2.
Picard, E. (*Paris*): La mécanique classique et ses approximations successives. – **1907**, n. 1.
Piéron, H. (*Paris*): Le problème de l'orientation, envisagé chez les fourmis. – **1912**, n. 5.
Pikler, J. (*Budapest*): Ueber die biologische Funktion des Bewussteseins (Sur la fonction biologique de la conscience). – **1909**, n. 2.

Pizzetti, P. (*Pisa*): Le misurazioni fisiche e la teoria degli errori d'osservazione (Les mesurages physiques et la théorie des erreurs d'observation). – **1907**, n. **3**.
Poincaré, H. (*Paris*): L'avenir des mathématiques. – **1908**, n. **3**.
— L'évolution des lois. – **1911**, n. **2**.
— La logique de l'infini. – **1912**, n. **4**.
— L'espace et le temps. – **1912**, n. **5**.
Prenant, A. (*Paris*): Les théories physiques de la mitose. – **1913**, n. **3**.
Pringsheim, E. (*Breslau*): Temperaturstrahlung und Lumineszenz (Rayonnement thermique et luminescence). – **1913**, n. **2**.
Puiseux, P. (*Paris*): La place du Soleil parmi les étoiles. – **1911**, n. **1**.
Rabaud, E. (*Paris*): L'évolution tératologique. – **1911**, n. **1**.
Raffaele, F. (*Palermo*): Il concetto di specie in biologia: I. Avanti e in Darwin; II. La critica post-darviniana (Le concept d'espèce en biologie: I. Avant et chez Darwin; II. La critique post-darwinienne). – **1907**, n. **1** et **2**.
Reinach, S. (*Paris*): De l'influence des images sur la formation des mythes. – **1909**, n. **2**.
Rey, A. (*Paris*): La possibilité d'une méthode positive dans la théorie de la connaissance. – **1909**, n. **4**.
— L'ostracisme du concept de force dans la physique moderne. – **1912**, n. **3**.
Riccobono, S. (*Palermo*): L'influenza del cristianesimo nella codificazione di Giustiniano (L'influence du christianisme dans la codification de Justinien). – **1909**, n. **1**.
Rignano, E. (*Milano*): Le rôle des « théoriciens » dans les sciences biologiques et sociologiques. – **1912**, n. **2**.
— La mémoire biologique en énergétique. – **1909**, n. **3**.
— Dell'origine e natura mnemonica delle tendenze affettive (De l'origine et de la nature mnémonique des tendances affectives). – **1911**, n. **1**.
— Dell'attenzione. Ia Parte: Contrasto affettivo e unità di coscienza (De l'attention. Ière Partie: Contraste affectif et unité de conscience). – **1911**, n. **4**.
— Dell'attenzione. IIa Parte: Vividità e connessione (De l'attention. IIème Partie: Vividité et connexion). – **1912**, n. **1**.
— Che cos'è il ragionamento? (Qu'est-ce que le raisonnement?). – **1913**, n. **1**.
— L'evoluzione del ragionamento. Ia Parte: Dal ragionamento concreto al ragionamento astratto (L'évolution du raisonnement. Ière Partie: Du raisonnement concret au raisonnement abstrait). – **1913**, n. **4**.
— L'evoluzione del ragionamento. IIa Parte: Dall'intuizione alla deduzione (L'évolution du raisonnement. IIème Partie: De l'intuition à la déduction). – **1913**, n. **5**.
— Qu'est-ce que la conscience? – **1907**, n. **4**.
— Il fenomeno religioso (Le phénomène religieux). – **1910**, n. **1**.
— Le matérialisme historique. – **1908**, n. **3**.
— Il socialismo (Le socialisme). – **1910**, n. **4**.
Righi, A. (*Bologna*): Comete ed elettroni (Comètes et électrons). – **1910**, n. **4**.
Ritz, W. (*Göttingen*): Die Gravitation (La gravitation). – **1909**, n. **2**.
— Du rôle de l'éther en physique. – **1908**, n. **2**.
Rosa, D. (*Firenze*): Delle leggi che regolano la variabilità filogenetica (Des lois qui gouvernent la variabilité phylogénétique). – **1908**, n. **4**.
— I dilemmi fondamentali circa il metodo dell'evoluzione (Dilemmes fondamentaux touchant la méthode de l'évolution). – **1912**, n. **2**.
Rouse, W. H. D. (*Cambridge*): Classical work and method in the twentieth century (Les études classiques pendant le XXe siècle). – **1908**, n. **3**.
Rudzki, M. P. (*Cracovie*): L'âge de la Terre. – **1913**, n. **2**.
Russell, B. (*Cambridge*): On the notion of cause (Sur la notion de cause). – **1913**, n. **3**.
Russell, E. S. (*London*): The evidence of natural selection (Les preuves de l'existence d'une sélection naturelle). – **1909**, n. **1**.
— Vitalism (Le vitalisme). – **1911**, n. **2**.
Sagnac, Ph. (*Lille*): De l'importance relative des faits économiques dans l'évolution historique. – **1909**, n. **2**.
Sayce, A. H. (*Oxford*): The laws of Babylonia (Les lois de Babylone). – **1912**, n. **1**.
Schiaparelli, G. (*Milano*): I primordi dell'astronomia presso i Babilonesi (La naissance de l'astronomie chez les Babyloniens). – **1908**, n. **2**.
— I progressi dell'astronomia presso i Babilonesi (Les progrès de l'astronomie chez les Babyloniens). – **1908**, n. **3**.
Scialoja, V. (*Roma*): L'arbitrio del legislatore nella formazione del diritto positivo (L'arbitraire du législateur dans la formation du droit positif). – **1910**, n. **1**.
Scott, D. H. (*London*): The evolution of plants (L'évolution des plantes). – **1912**, n. **5**.
See, T. J. J. (*Mare Island*, *California*, *U. S. A.*): The new science of cosmogony (La nouvelle science de la cosmogonie). – **1912**, n. **1**.
Seeliger, H. (*München*): Ueber die Anwendung der Naturgesetze auf das Universum (Sur l'application des lois de la nature à l'Univers). – **1909**, n. **4**.

Semon, R. (*München*): Die physiologischen Grundlagen der organischen Reproduktionsphaenomene (Les fondements physiologiques des phénomènes organiques de reproduction). – **1910,** n. **2.**
Sergi, G. (*Roma*): Lacune nella scienza antropologica (Quelques lacunes dans la science anthropologique). – **1909,** n. **3.**
Severi, F. (*Padova*): Ipotesi e realtà nelle scienze geometriche (Hypothèses et réalité dans les sciences géométriques). – **1910,** n. **3.**
Sherrington, Ch. S. (*Liverpool*): The « rôle » of reflex inhibition (Le rôle de l'inhibition réflexe). – **1911,** n. **2.**
Simmel, G. (*Berlin*): Beiträge zur Philosophie der Geschichte (Quelques considérations sur la philosophie de l'histoire). – **1909,** n. **4.**
Smoluchowski, M. (*Lemberg*): Anzahl und Grösse der Moleküle und Atome (Nombre et dimensions des molécules et des atomes). – **1913,** n. **1.**
Soddy, F. (*Glasgow*): The parent of radium (Le père du radium). – **1909,** n. 2.
— Transmutation, the vital problem of the future (La transmutation, problème vital de l'avenir). – **1912,** n. **2.**
— The periodic law from the standpoint of radioactivity (La loi des périodes envisagée au point de vue de la radioactivité). – **1913,** n. **3.**
Solla, R. (*Pola*): Die Pflanzenphysiologie in ihren Beziehungen zu den anderen Wissenschaften (La physiologie végétale et ses rapports avec les autres sciences). – **1907,** n. **2.**
Sollas, W. J. (*Oxford*): The evolution of man (L'évolution de l'homme). – **1911,** n. **1.**
Sombart, W. (*Breslau*): Die Entstehung der Städte im Mittelalter (L'origine des villes au moyen âge). – **1907,** n. **3.**
— Judaismus und Kapitalismus (Judaïsme et capitalisme). – **1912,** n. **3.**
Sommerfeldt, E. (*Tübingen*): Grundlagen der theoretischen Kristallographie (Les bases de la cristallographie théorique). – **1907,** n. **3.**
Suali, L. (*Pavia*): Esiste una filologia indiana? (Existe-t-il une philologie indienne?) – **1911,** n. **4.**
Suess, F. E. (*Wien*): Moderne Theorien der Erdbeben und Vulkane (Les théories modernes sur les tremblements de terre et les volcans). – **1909,** n. **3** et **4.**
Supino, C. (*Pavia*): Il carattere delle leggi economiche (Le caractère des lois économiques). – **1907,** n. **1.**
Tannery, J. (*Paris*): Questions pédagogiques: L'enseignement secondaire. – **1907,** n. **1.**
Thomson, A. (*Aberdeen*): What determines sex? (Qu'est-ce qui détermine le sexe?). – **1912,** n. **3.**
Uexküll, J. v. (*Heidelberg*): Die neuen Fragen in der experimentellen Biologie (Nouvelles questions de la biologie expérimentale). – **1908,** n. **3.**
Vacca, G. (*Roma*): La scienza nell'Estremo Oriente (La science dans l'Extrême-Orient). – **1912,** n. **2.**
Volterra, V. (*Roma*): Il momento scientifico presente e la nuova Società italiana per il progresso delle scienze (Le moment scientifique présent et la nouvelle Société italienne pour l'avancement des sciences). – **1907,** n. **4.**
Walden, L. (*Riga*): Ueber das Wesen des Lösungsvorganges und die Rolle des Mediums (Sur la nature du processus de solution et le rôle du solvant). – **1907,** n. **4.**
Wallerant, F. (*Paris*): Les liquides cristallisés. – **1907,** n. **2.**
Westermarck, E. (*Helsingfors*): The origin of religious celibacy (Les origines du célibat religieux). – **1907,** n. **4.**
White, W. H. (*London*): The place of mathematics in engineering practice (La place des mathématiques dans la pratique du génie). – **1912,** n. **6.**
Wiesner, J. (*Wien*): Der Lichtbedarf der Pflanze (La quantité de lumière nécessaire à la plante). – **1907,** n. **4.**
Xénopol, A. D. (*Jassy*): L'idée de loi scientifique et l'histoire. – **1912,** n. **6.**
Zeeman, P. (*Amsterdam*): L'origine des couleurs du spectre. – **1909,** n. **1.**
Zeuthen, G. H. (*Kopenhagen*): Quelques traits de la propagation de la science de génération en génération. – **1909,** n. **1.**
Ziegler, H. E. (*Jena*): Die natürliche Zuchtwahl (La sélection naturelle). – **1907,** n. **1.**
Ziehen, H. (*Frankfurt a. M.*): Die Kultur der Gegenwart (La culture intellectuelle de notre temps). – **1910,** n. **1.**

Sommaires des numéros parus en 1914 (8ème année)

Première Livraison - (N. XXXIII) - (Janvier 1914)

H. Turner - *The periodicities of Sun-Spots - (La périodicité des taches solaires).* — **M. Abraham** - *Die neue Mechanik - (La nouvelle mécanique).* — **A. Righi** - *La natura dei raggi X - (La nature des rayons X).* — **M. Hartog** - *Samuel Butler and recent mnemic biological theories - (Samuel Butler et les récentes théories biologiques de la mémoire).* — **Ph. Sagnac** - *L'esprit et les progrès de la Révolution française. Ire Partie: Les origines de la Révolution.* — **Ch. Guignebert** - *Le dogme de la Trinité. IIème Partie: L'évolution des deux triades et les premiers conflits.*

Nota critica - Note critique - Kritische Notiz - Critical Note.

R. Maunier - *L'art égyptien comme expression de la société égyptienne.*

Comptes rendus - Revues générales - Revue des Revues - Chronique.

Deuxième Livraison - (N. XXXIV) - (Mars 1914)

T. J. J. See - *The law of nature in celestial evolution - (La loi de nature dans l'évolution céleste).* — **C. Acqua** - *Esistono fenomeni psicologici nei vegetali? - (Existe-t-il des phénomènes psychologiques dans les végétaux?).* — **E. Durkheim** - *Le dualisme de la nature humaine et ses conditions sociales.* — **S. Langdon** - *Babylonian magic - (La magie babylonienne).* — **W. Sombart** - *Liebe, Luxus und Kapitalismus - (Amour, luxe et capitalisme).*

Comptes rendus - Revues générales - Revue des Revues - Chronique.

Troisième Livraison - (N. XXXV) - (Mai 1914)

A. Einstein - *Zum Relativitätsproblem - (Sur le problème de la relativité).* — **S. Arrhenius** - *Das Milchstrassenproblem - (Le problème de la Voie Lactée).* — **F. Bottazzi** - *Le attività fisiologiche fondamentali. Primo articolo: L'attività nervosa e i processi elementari su cui si fonda - (Les activités physiologiques fondamentales. Premier article: L'activité nerveuse et les processus élémentaires qui lui servent de base).* — **J. A. Thomson** - *Sex-Characters - (Les caractères sexuels).* — **A. Meillet** - *Le problème de la parenté des langues.* — **R. Michels** - *Economia e politica - (Économie et politique).*

Nota critica - Note critique - Kritische Notiz - Critical Note.

A. Mieli - *Les précurseurs de Galileo.*

Comptes rendus - Revues générales - Revue des Revues - Chronique.

Quatrième Livraison - (N. XXXVI) - (Juillet 1914)

B. Russell - *The relation of sense-data to physics - (Les rapports des données sensorielles avec la physique).* — **H. A. Lorentz** - *La gravitation.* — **L. Cuénot** - *Théorie de la préadaptation.* — **A. Adler** - *Die Individualpsychologie, ihre Voraussetzungen und Ergebnisse - (La psychologie individuelle, ses hypothèses et ses résultats).* — **R. Pettazzoni** - *Storia del cristianesimo e storia delle religioni - (Histoire du christianisme et histoire des religions).*

Nota critica - Note critique - Kritische Notiz - Critical Note.

M. Abraham - *Sur le problème de la relativité.*

Comptes rendus - Revues générales - Revue des Revues - Chronique.

Cinquième Livraison - (N. XXXVII) - (Septembre 1914)

T. C. Chamberlin - *The planetesimal hypothesis - (L'hypothèse planétésimale).* — **D. Einhorn** - *Archigonie und Deszendenztheorie - (Archigonie et théorie de la descendance).* — **C. Golgi** - *La moderna evoluzione delle dottrine e delle conoscenze sulla vita. Parte Ia: I problemi fondamentali bio-fisiologici - (L'évolution moderne des doctrines et des connaissances sur la vie. Ire Partie: Les problèmes fondamentaux bio-physiologiques).* — **O. Jespersen** - *Energetik der Sprache - (L'énergétique du langage).* — **Ch. Guignebert** - *Le dogme de la Trinité. - IIIème Partie: La crise arienne, S. Augustin et le symbole d'Athanase. IVème Partie: Immobilité, décadence et ruine.*

Nota critica - Note critique - Kritische Notiz - Critical Note.

R. Maunier - *Les lois de l'évolution de l'art.*

Comptes rendus - Revues générales - Revue des Revues - Chronique.

Sixième Livraison - (N. XXXVIII) - (Novembre 1914)

E. Rutherford - *The structure of the atom - (La structure de l'atome).* — **G. Bugge** - *Physikalische Eigenschaften und chemische Konstitution - (Propriétés physiques et constitution chimique).* — **C. Golgi** - *La moderna evoluzione delle dottrine e delle conoscenze sulla vita. Parte IIa: I problemi fondamentali psico-fisiologici - (L'évolution moderne des doctrines et des connaissances sur la vie. IIème Partie: Les problèmes fondamentaux psycho-physiologiques).* — **W. Deonna** - *Qu'est-ce que l'archéologie?*

Nota critica - Note critique - Kritische Notiz - Critical Note.

A. Mieli - *La méthode Galiléenne et les sciences biologiques.*

Comptes rendus - Revues générales - Revue des Revues - Chronique.

BIBLIOTHÈQUE SCIENTIFIQUE INTERNATIONALE

Volumes in-8, cartonnés à l'anglaise; ouvrages à **6, 9** et **12** francs

Derniers volumes parus:

LANESSAN (J.-L. de), professeur agrégé d'histoire naturelle à la Faculté de médecine de Paris, ancien ministre, député. **Transformisme et créationisme.** *Contribution à l'histoire du transformisme depuis l'antiquité jusqu'à nos jours.* 1 vol. in-8. **6** fr.

CRESSON (A.), docteur ès lettres, professeur au Collège Chaptal. L'espèce et son serviteur (*sexualité, moralité*). 1 vol. in-8, avec 42 grav. . . . . **6** fr.

PEARSON (K.), professeur au Collège de l'Université de Londres. La grammaire de la science (*La physique*). Traduit de l'anglais par Lucien March. 1 vol. in-8, **9** fr.

NOUVELLE COLLECTION SCIENTIFIQUE

Directeur: ÉMILE BOREL

Sous-directeur de l'École normale supérieure, Professeur à la Sorbonne.

Volumes in-16 à **3** fr. **50**

Derniers volumes parus:

PERCIN (Général), ancien membre du Conseil Supérieur de la Guerre. **Le combat.** Avec cartes.

BOREL (E.). **Le hasard.**

VOLTERRA (V.), professeur à l'Université de Rome, correspondant de l'Institut, HADAMARD (J.), membre de l'Académie des Sciences, professeur au Collège de France, LANGEVIN (P.), membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'École polytechnique, et BOUTROUX (P.), professeur à l'Université de Poitiers. **Henri Poincaré.** *L'œuvre scientifique. L'œuvre philosophique.*

MARCHIS (L.), prof. à la Faculté des sciences de Paris. **Le froid industriel.** Avec 104 fig.

PAINLEVÉ (Paul), de l'Institut, BOREL (Emile) et MAURAIN, directeur de l'Institut aérotechnique de l'Université de Paris. **L'aviation.** 6e éd., revue et augm. Avec 48 fig.

SAGERET (J.). **Le système du monde.** *Des Chaldéens à Newton.* Avec 20 figures.

LEROY-BEAULIEU (Paul), membre de l'Institut, professeur au Collège de France. **La question de la population.** (*Couronné par l'Institut.*)

PERRIN (Jean), professeur de chimie physique à la Sorbonne. **Les atomes.** Avec 13 fig. 4e édition, revue. (*Couronné par l'Académie des Sciences*).

GENTIL (L.), professeur adjoint à la Sorbonne, directeur de l'Institut scientifique de Rabat. **Le Maroc physique.** Avec cartes.

TANNERY (J.), de l'Institut. **Science et philosophie,** avec une notice par E. Borel.

Envoi franco contre mandat-poste.

† **Bach** u. **R. Seefelder,** *Atlas zur Entwicklungsgeschichte des menschlichen Auges.* I. Lieferung S. 1-18. gr. 4. Mit 24 Figuren im Text und Tafel I-XV mit 15 Blatt Tafelerklärungen. ---------- M. **20** —
II. Lieferung S. 19-74. gr. 4. Mit 30 Figuren im Text und Tafel XVI-XXXIV. M. **36** —
(Die III. (Schluss-) Lieferung wird 1914 erscheinen).

Carl Gegenbaurs *Lehrbuch der Anatomie des Menschen.* 8. umgearbeitete und vermehrte Auflage herausgegeben von M. FÜRBRINGER. I. Band: Einleitung. Erster Abschnitt: *Vom ersten Aufbau und von der Zusammensetzung des Körpers.* Mit 276 zum Teil farbigen Figuren im Text. XXI u. 689 Seiten. gr. 8. Geheftet - M. **18** —
in Halbfranzband gebunden ---------- M. **20,50**
III. Band, 1. Lieferung: *Blutgefässsystem* bearbeitet von E. GÖPPERT. Mit 99 zum Teil farbigen Figuren im Text. 258 Seiten. gr. 8. ---------- M. **8** —
(Der II. Band befindet sich in Neubearbeitung).

Briefwechsel zwischen Bessel u. Steinheil. Herausgegeben im Auftrage der Kgl. Akademien der Wissenschaften zu Berlin und München. XVI und 250 Seiten. gr. 8. M. **8** —

Richard Goldschmidt, *Einführung in die Vererbungswissenschaft.* In 22 Vorlesungen für Studierende, Aerzte, Züchter. 2. Auflage. Mit 189 Abb. im Text. XII u. 546 S. gr. 8. Geh. M. **18** —; in Leinen geb. ---------- M. **14** —

Willy Hellpach, *Die geopsychischen Erscheinungen. Wetter, Klima und Landschaft in ihrem Einfluss auf das Seelenleben.* VI u. 368 S. 8 Geh. M. **6** —; in Leinen geb. ---------- M. **7,20**

Rudolf Höber, *Physikalische Chemie der Zelle u. der Gewebe.* Dritte neubearbeitete Auflage. Mit 55 Figuren im Text. XV und 671 S. gr. 8. In Leinen geb. M. **17,25**

O. Külpe, *Psychologie u. Medizin* (Sonderabdruck aus der Zeitschrift für Pathopsychologie. I. Bd.) VI u. 81 S. gr. 8. ---------- M. **1,50**

Niessl von Mayendorf, *Die aphasischen Symptome und ihre corticale Lokalisation.* Mit 51 Figuren im Text und 7 Tafeln. XIV und 454 Seiten. 4° -- M. **32** —

M. Nussbaum, G. Karsten, M. Weber, *Lehrbuch der Biologie für Hochschulen.* Mit 186 Abbildungen im Text. XI und 529 Seiten. gr. 8. Geheftet M. **12** —
in Leinen geb. ---------- M. **13,25**

Ludwig Plate, *Vererbungslehre.* Mit besonderer Berücksichtigung des Menschen, für Studierende, Aerzte und Züchter. Mit 179 Figuren und Stammbäumen im Text und 3 farbigen Tafeln. (Handbücher der Abstammungslehre, Band II.) VIII und 520 Seiten. gr. 8. Geheftet M. **18** —; gebunden ---------- M. **19** —

Ludwig Plate, *Selektionsprinzip und Probleme der Artbildung.* Ein Handbuch des Darwinismus. Mit 107 Figuren im Text. (Handbücher der Abstammungslehre, Band I.) XVI und 650 Seiten. gr. 8. Geheftet M. **16** —; gebunden ----- M. **17** —

Wilhelm Roux, *Terminologie der Entwicklungsmechanik der Tiere und Pflanzen.* XII u. 465 S. 8. In Leinen geb. ---------- M. **10** —

Wilhelm Roux, *Über kausale und konditionale Weltanschauung und deren Stellung zur Entwicklungsmechanik.* Eine Entgegnungsschrift auf die unter gleichem Titel im vorigen Jahre erschienene Schrift des Physiologen MAX VERWORN. 66 S. gr. 8. ---------- M. **1,50**

Adolf Wagner, *Vorlesungen über vergleichende Tier- und Pflanzenkunde.* Zur Einführung für Lehrer, Studierende und Freunde der Naturwissenschaften. VIII u. 518 S. gr. 8. Geheftet M. **11** —; in Leinen geb. ---------- M. **12,50**

Digitized by Google

GIACOMO VENEZIAN

Proprietà fondiaria in Libia

Un volume in-16 . . . . Lire **2.**—

PANFILO GENTILE

Sulla dottrina del contratto sociale

Appunti storico-critici

Un volume in-8 . . . . Lire **3.**—

PER UNA CONCEZIONE etico-giuridica del socialismo

secondo i principii dell'idealismo critico

Un volume in-8 . . . . Lire **3.**—

GIORGIO DEL VECCHIO

IL CONCETTO DEL DIRITTO

Un volume in-8 . . . . Lire **4.**—

LUIGI RAVA

Dal codice civile al codice del lavoro

Un volume in-8 . . . . Lire **2.**—

FILIPPO LUSSANA

LETTERE DI ILLETTERATI

Note di psicologia sociale

Un volume in-16 . . . . Lire **3.**—

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA DI OPERE SCIENTIFICHE